Formale Grundlagen der Informatik II
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
15.06.11

Minitest Lösung

Betrachten Sie die Formeln in der Tabelle.

- Welche Formel ist in KNF, welche in DNF?
- Welche Formel/Formeln sind äquivalent zu der Formel

$$\varphi = r \wedge (s \vee t) \vee \neg s$$

und sind damit eine DNF bzw. KNF von φ?

	KNF	DNF	$\equiv \varphi$
$r \wedge t$	☒	☒	☐
$(r \vee s) \wedge (r \vee t)$	☒	☐	☐
$r \vee \neg s$	☒	☒	☒
$r \vee (s \wedge (r \vee q))$	☐	☐	☐
$\neg r \vee (\neg s \wedge \neg t)$	☐	☒	☐

Begründung: Für die Einteilung in DNF und KNF siehe Skript 3.2.
Zu der Äquivalenz mit φ: Es gilt

$$r \wedge (s \vee t) \vee \neg s \overset{(1)}{\equiv} \neg s \vee (r \wedge s) \vee (r \wedge t) \overset{(1)}{\equiv} ((\neg s \vee r) \wedge \overbrace{(\neg s \vee s)}^{\equiv 1}) \vee (r \wedge t) \equiv r \vee (r \wedge t) \vee \neg s \overset{(2)}{\equiv} r \vee \neg s$$

mit (1) Distributivgesetz und (2) Absorption.

Gruppenübung

Aufgabe G1

Finden Sie mittels Beweissuche im Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$ für folgende Formeln bzw. Sequenzen entweder eine Herleitung oder eine nicht-erfüllende Belegung.

(a) $\vdash (p \wedge q) \vee \neg(q \vee r) \vee r \vee \neg p$

(b) $p, q \vee r \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(c) $\vdash \neg(\neg(p \wedge q) \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Lösungsskizze:

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q,p\vdash p,r}\,(\text{Ax}) \quad \dfrac{}{q,p\vdash q,r}\,(\text{Ax})}{q,p\vdash p\wedge q,r}\,(\wedge\text{R}) \quad \dfrac{}{r,p\vdash p\wedge q,r}\,(\text{Ax})}{q\vee r,p\vdash p\wedge q,r}\,(\vee\text{L})}{q\vee r\vdash p\wedge q,r,\neg p}\,(\neg\text{R})}{\vdash p\wedge q,\neg(q\vee r),r,\neg p}\,(\neg\text{R})}{\vdash p\wedge q,\neg(q\vee r),r\vee\neg p}\,(\vee\text{R})}{\vdash p\wedge q,\neg(q\vee r)\vee r\vee\neg p}\,(\vee\text{R})}{\vdash (p\wedge q)\vee\neg(q\vee r)\vee r\vee\neg p}\,(\vee\text{R})$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,q\vdash p,p\wedge r}\,(\text{Ax}) \quad \dfrac{}{p,q\vdash q,p\wedge r}\,(\text{Ax})}{p,q\vdash p\wedge q,p\wedge r}\,(\wedge\text{R}) \quad \dfrac{\dfrac{}{p,r\vdash p\wedge q,p}\,(\text{Ax}) \quad \dfrac{}{p,r\vdash p\wedge q,r}\,(\text{Ax})}{p,r\vdash p\wedge q,p\wedge r}\,(\wedge\text{R})}{p,q\vee r\vdash p\wedge q,p\wedge r}\,(\vee\text{L})}{p,q\vee r\vdash (p\wedge q)\vee(p\wedge r)}\,(\vee\text{R})$$

(c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{r\vdash q,q \qquad r\vdash q,p}{r\vdash q,p\wedge q}\,(\wedge\text{R}) \quad \dfrac{}{r\vdash r,p\wedge q}\,(\text{Ax})}{r\vdash q\wedge r,p\wedge q}\,(\wedge\text{R})}{\neg(p\wedge q),r\vdash q\wedge r}\,(\neg\text{L})}{\neg(p\wedge q)\wedge r\vdash q\wedge r}\,(\wedge\text{L})}{\vdash\neg(\neg(p\wedge q)\wedge r),q\wedge r}\,(\neg\text{R})}{\vdash\neg(\neg(p\wedge q)\wedge r)\vee(q\wedge r)}\,(\vee\text{R})$$

Eine nicht erfüllende Belegung ist z.B. $r\mapsto 1$ und $q,p\mapsto 0$.

Aufgabe G2

(a) Weisen Sie *semantisch* die Korrektheit der folgenden Sequenzenregel nach:

$$\dfrac{\Gamma\vdash(\varphi\to\psi)\to\varphi,\Delta}{\Gamma\vdash\varphi,\Delta}$$

(b) Leiten Sie die folgende Sequenz in $\mathcal{SK}$ ab:

$$\vdash((\varphi\to\psi)\to\varphi)\to\varphi$$

Lösungsskizze:

(a) Angenommen, die Sequenz $\Gamma\vdash(\varphi\to\psi)\to\varphi,\Delta$ ist allgemeingültig. Wir müssen zeigen, dass dann auch die Sequenz $\Gamma\vdash\varphi,\Delta$ allgemeingültig ist.

Sei also $\mathfrak{I}\models\Gamma$ ein Modell der linken Seite. Da $\Gamma\vdash(\varphi\to\psi)\to\varphi,\Delta$ allgemeingültig ist, gibt es eine Formel $\delta\in\Delta\cup\{(\varphi\to\psi)\to\varphi\}$ mit $\mathfrak{I}\models\delta$. Wenn $\delta\in\Delta$ ist, dann sind wir fertig. Andernfalls gilt $\mathfrak{I}\models(\varphi\to\psi)\to\varphi$. Wir behaupten, dass dann $\mathfrak{I}\models\varphi$ gilt. Wenn das nicht so wäre, dann folgt einerseits $\mathfrak{I}\models\varphi\to\psi$, da $\mathfrak{I}(\varphi)=0$, aber andererseits auch $\mathfrak{I}\not\models\varphi\to\psi$, da $\mathfrak{I}\models(\varphi\to\psi)\to\varphi$ und $\mathfrak{I}(\varphi)=0$. Also $\mathfrak{I}\models\varphi$ und der Beweis ist fertig.

(b) Bekannt ist, dass $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$ für aussagenlogische Formeln φ, ψ. Wir leiten nun wie folgt im $\mathcal{SK}$ ab:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \psi, \varphi}\,(\mathrm{Ax})}{\vdash \neg\varphi, \psi, \varphi}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash (\varphi \to \psi), \varphi}\,(\vee\mathrm{R})}{\neg(\varphi \to \psi) \vdash \varphi}\,(\neg\mathrm{L}) \qquad \dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(\mathrm{Ax})}{(\varphi \to \psi) \to \varphi \vdash \varphi}\,(\vee\mathrm{L})}{\vdash \neg((\varphi \to \psi) \to \varphi), \varphi}\,(\neg\mathrm{R})}{\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi}\,(\vee\mathrm{R})$$

Aufgabe G3

Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, -^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}}, 0, 1)$. Eine Formel $\varphi(x,y)$ definiert in $\mathcal{R}$ die Relation

$$\varphi := \{\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \mathcal{R} \models \varphi[a,b] \,\}.$$

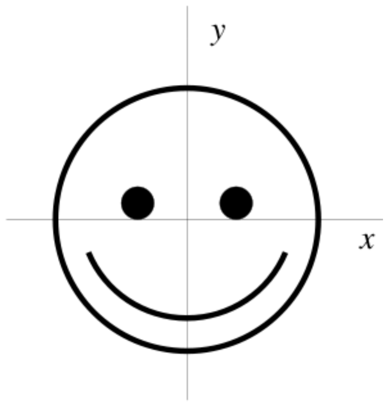
Geben Sie Formeln an, die die folgenden Relationen in $\mathbb{R}^2$ definieren:

(a) Einen Kreis mit Radius 2 um den Ursprung.

(b) Eine Gerade durch den Ursprung mit Steigung $2/3$.

(c) Die Strecke, welche vom Punkt $(1,2)$ bis zum Kreis aus (i) führt und senkrecht auf diesem steht.

(d) Einen Smiley.



Lösungsskizze:

(a) $\varphi(x,y) := x \cdot x + y \cdot y = 1 + 1 + 1 + 1.$

(b) $\varphi(x,y) := x + x = y + y + y$ oder $\varphi(x,y) := (1+1) \cdot x = (1+1+1) \cdot y.$

(c) $\varphi(x,y) := (y + y = x) \;\wedge\; (x < 1 \;\vee\; x = 1) \;\wedge\; (0 < x)$
$\wedge\; (1+1+1+1 < x \cdot x + y \cdot y \;\vee\; 1+1+1+1 = x \cdot x + y \cdot y)$

(d) Z.B.: $\varphi(x,y) := (x \cdot x + y \cdot y = \underbrace{1+1+\ldots 1}_{\text{16-mal}}) \vee (x \cdot x + y \cdot y = \underbrace{1+1+\ldots 1}_{\text{9-mal}} \wedge y < -1)$
$\vee\; ((x-(1+1)) \cdot (x-(1+1)) + (y-1) \cdot (y-1) < 1) \vee ((x+(1+1)) \cdot (x+(1+1)) + (y-1) \cdot (y-1) < 1)$

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass folgende Regeln korrekt sind.

(i) $\dfrac{\Gamma \vdash \emptyset}{\Gamma \vdash \varphi}$ (ex falso quodlibet) (ii) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}{\Gamma, \varphi \vdash \chi}$

(b) Geben Sie eine „direkte Simulation“ von Regel (ii) in $\mathcal{SK}^+$ an.

(Extra) Begründen Sie, warum Regel (ii) in $\mathcal{SK}$ nicht direkt simulierbar ist. D.h. zeigen Sie, dass es keinen $\mathcal{SK}$ Ableitungsbaum mit Wurzel $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ gibt, dessen Blätter nur mit Axiomen oder $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ beschriftet sind.

Hinweis: Betrachten Sie hierfür die Länge der Formeln von Prämisse und Konklusion der $\mathcal{SK}$ Regeln.

Lösungsskizze:

(a) Zu Regel (i): Angenommen $\Gamma \vdash \emptyset$ ist allgemeingültig. Dann gilt $\bigwedge \Gamma \models 0$, d.h. es gilt $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} = 0$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$. Also ist $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}}$ für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$, und es folgt, dass $\Gamma \vdash \varphi$ allgemeingültig ist.

Zu Regel (ii): Angenommen $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi$ ist allgemeingültig und $\mathfrak{I}$ eine (beliebige) Interpretation. Dann gilt $(\bigwedge \Gamma) \wedge (\varphi \vee \psi) \models \chi$, d.h. es gilt $((\bigwedge \Gamma) \wedge (\varphi \vee \psi))^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$. Also ist $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$ oder $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$.
Falls $(\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$, dann folgt sofort $\min((\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}}, \varphi^{\mathfrak{I}}) = ((\bigwedge \Gamma) \wedge \varphi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$. Falls $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$, dann folgt wegen $(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = \max(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$, dass $\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$, also $\min((\bigwedge \Gamma)^{\mathfrak{I}}, \varphi^{\mathfrak{I}}) = ((\bigwedge \Gamma) \wedge \varphi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$.
In beiden Fällen folgt $((\bigwedge \Gamma) \wedge \varphi)^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}}$, also ist $\Gamma, \varphi \vdash \chi$ allgemeingültig.

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi, \psi}\,(\text{Ax})}{\varphi \vdash \varphi \vee \psi}\,(\vee\text{R}) \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \chi}}{\Gamma, \varphi \vdash \chi}\,(\text{modus ponens})$$

(Extra) In $\mathcal{SK}$-Ableitungen kommen alle Formeln, die in einer Regel oben stehen im unteren Teil als ganzes oder Teilformel vor, demzufolge kann Regel (ii) (da wir nicht wissen, wie Γ, φ, ψ und χ aussehen) nicht herleitbar sein.

Aufgabe H2

Wir definieren folgende partielle Ordnung auf aussagenlogischen $\mathcal{V}_n$-Interpretationen:

$$\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}' \quad :\text{gdw.} \quad \mathfrak{I}(p) \leq \mathfrak{I}'(p) \;\text{ für alle Variablen } p \in \mathcal{V}_n$$

Eine AL_n-Formel φ heißt *monoton*, wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}'$ gilt:

$$\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}'}.$$

Beweisen Sie per Induktion über den Formelaufbau, dass jede aussagenlogische Formel φ, in der kein Negationszeichen vorkommt, monoton ist.
Bemerkung: Jede monotone Formel ist äquivalent zu einer Formel ohne Negationszeichen.

Lösungsskizze: Angenommen φ ist eine aussagenlogische Formel, in der kein Negationszeichen vorkommt und $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}'$ sind Interpretationen mit $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}'$. Wir beweisen mit Induktion, dass $\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}'}$ gilt.

- $\varphi = 0$, $\varphi = 1$ sind klar.

- $\varphi = p \in \mathcal{V}_n$: weil $\mathfrak{I} \leq \mathfrak{I}'$ gilt $\mathfrak{I}(p) \leq \mathfrak{I}'(p)$, also $\varphi^{\mathfrak{I}} \leq \varphi^{\mathfrak{I}'}$.
- $\varphi = \neg\psi$ kann nicht sein, da in φ kein Negationszeichen vorkommt.
- $\varphi = \psi \wedge \chi$: nach I.V. gilt $\psi^{\mathfrak{I}} \leq \psi^{\mathfrak{I}'}$ und $\chi^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}'}$. Also gilt $\min(\psi^{\mathfrak{I}}, \chi^{\mathfrak{I}}) \leq \min(\psi^{\mathfrak{I}'}, \chi^{\mathfrak{I}'})$, und es folgt $(\psi \wedge \chi)^{\mathfrak{I}} \leq (\psi \wedge \chi)^{\mathfrak{I}'}$.
- $\varphi = \psi \vee \chi$: nach I.V. gilt $\psi^{\mathfrak{I}} \leq \psi^{\mathfrak{I}'}$ und $\chi^{\mathfrak{I}} \leq \chi^{\mathfrak{I}'}$. Also gilt $\max(\psi^{\mathfrak{I}}, \chi^{\mathfrak{I}}) \leq \max(\psi^{\mathfrak{I}'}, \chi^{\mathfrak{I}'})$, und es folgt $(\psi \vee \chi)^{\mathfrak{I}} \leq (\psi \vee \chi)^{\mathfrak{I}'}$.