Formale Grundlagen der Informatik II 2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2011**
Prof. Dr. Martin Ziegler **08.06.11**
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

Minitest Lösung

a) Seien φ, ψ zwei allgemeingültige Sätze. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen richtig?

- ☒ φ ist erfüllbar.
- ☒ $\varphi \wedge \psi$ ist allgemeingültig.
- ☒ $\varphi \vee \psi$ ist allgemeingültig.
- ☒ $\neg\varphi$ ist nicht erfüllbar.

Begründung: φ ist erfüllbar, weil nach Voraussetzung jedes Modell φ erfüllt und damit es insbesondere ein Modell von φ gibt. Da für jedes Modell $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi, \psi$, gilt auch $\mathfrak{I} \models \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$ und damit sind $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi$ allgemeingültig. Weil für jedes $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$, folgt dass es kein $\mathfrak{I}$ gibt, dass $\mathfrak{I} \models \neg\varphi$, also ist $\neg\varphi$ nicht erfüllbar.

b) Seien φ, ψ nun zwei erfüllbare Sätze. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen richtig?

- ☐ $\varphi \wedge \psi$ ist erfüllbar.
- ☒ $\varphi \vee \psi$ ist erfüllbar.
- ☐ $\neg\varphi$ ist nicht erfüllbar.

Begründung: Seien $\varphi \equiv p$ und $\psi \equiv \neg p$, dann ist φ erfüllbar, weil das Modell $\mathfrak{I}$ mit $(p)^{\mathfrak{I}} = 1$ den Satz erfüllt, und ψ erfüllbar, weil das Modell $\mathfrak{I}'$ mit $(p)^{\mathfrak{I}'} = 0$ den Satz ψ erfüllt. Aber $\varphi \wedge \psi \equiv 0$ und ist damit nicht erfüllbar. Der Satz $\varphi \vee \psi$ ist erfüllbar, weil jedes Modell von φ auch ein Modell von $\varphi \vee \psi$ ist. Der Satz $\neg\varphi$ ist im Allgemeinen nicht nicht erfüllbar, weil z.B. für $\varphi \equiv p$ gilt das φ und $\neg\varphi$ erfüllbar sind.

Gruppenübung

Aufgabe G1

Seien φ und ψ AL-Formeln. Wie kann man das Resolutionsverfahren benutzen, um zu überprüfen, ob

(a) φ unerfüllbar ist;

(b) φ erfüllbar ist;

(c) φ allgemeingültig ist;

(d) φ nicht allgemeingültig ist;

(e) $\varphi \models \psi$;

(f) eine endliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist;

(g) eine unendliche Menge Φ von AL-Formeln unerfüllbar ist?

Lösungsskizze: Wir bezeichnen mit $K(\varphi)$ die Klauselmenge zu φ, d.h. die Menge der Klauseln einer zu φ äquivalenten Formel in KNF.

(a) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$

(b) $\Box \notin \mathrm{Res}^*(K(\varphi))$

(c) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(d) $\Box \notin \mathrm{Res}^*(K(\neg\varphi))$

(e) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\varphi \wedge \neg\psi))$

(f) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi))$

(g) $\Box \in \mathrm{Res}^*(K(\bigwedge \Phi_0))$ für ein endliches $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

Aufgabe G2

$$\begin{aligned} \text{Seien } \varphi &:= (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \\ \psi &:= (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionsverfahrens, dass (a) φ erfüllbar ist; (b) $\varphi \models \psi$ gilt.

Lösungsskizze:

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}^0(K) &= \big\{\{p, \neg q, \neg r\},\ \{\neg p, q, \neg r\},\ \{\neg p, \neg q\}\big\} \\ \mathrm{Res}^1(K) &= \mathrm{Res}^0(K) \cup \big\{\{q, \neg q, \neg r\},\ \{\neg q, \neg r\},\ \{p, \neg p, \neg r\},\ \{\neg p, \neg r\}\big\} \\ \mathrm{Res}^2(K) &= \mathrm{Res}^1(K) \cup \big\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}\big\} \\ \mathrm{Res}^3(K) &= \mathrm{Res}^2(K) \end{aligned}$$

(b) $\varphi \wedge \neg\psi \equiv (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$, daher betrachten wir die Klauseln: $\{p, \neg q, \neg r\},\ \{\neg p, q, \neg r\},\ \{\neg p, \neg q\},\ \{p, q\},\ \{p, \neg q, r\},\ \{\neg p, q, r\}$

$$\begin{tikzcd}
\{\neg p, q, r\} \arrow[d] & \{\neg p, q, \neg r\} \arrow[dl] & & \{p, \neg q, \neg r\} \arrow[dr] & \{p, \neg q, r\} \arrow[d] \\
\{\neg p, q\} \arrow[dr] & \{p, q\} \arrow[d] & & \{\neg p, \neg q\} \arrow[d] & \{p, \neg q\} \arrow[dl] \\
& \{q\} \arrow[dr] & & \{\neg q\} \arrow[dl] & \\
& & \Box & &
\end{tikzcd}$$

Da $\Box$ aus den Klauseln ableitbar ist, gilt $\varphi \models \psi$.

Aufgabe G3

Ein *Dominosystem* $\mathcal{D} = (D, H, V)$ besteht aus einer endlichen Menge D von quadratischen Dominosteinen und zwei Relationen $H \subseteq D \times D$ und $V \subseteq D \times D$, so dass

- $(d, e) \in H$ gdw. e rechts neben d passt,
- $(d, e) \in V$ gdw. e über d passt.

Wir betrachten ein festes Dominosystem $\mathcal{D} = (D, H, V)$.

(a) Geben Sie zu $n \in \mathbb{N}$ eine AL-Formelmenge Φ_n an, welche genau dann erfüllbar ist, wenn man ein Quadrat der Größe $n \times n$ so mit Dominosteinen aus $\mathcal{D}$ belegen kann, dass nebeneinander liegende Steine zueinander passen. (Wir nehmen an, dass es von jedem Dominostein beliebig viele Exemplare gibt.)

(b) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass man die gesamte Ebene $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ korrekt mit Dominosteinen belegen kann, vorausgesetzt dies geht für alle endlichen Quadrate $n \times n$.

(c) Beweisen Sie die Aussage aus (b) mit Hilfe des Lemmas von König anstatt des Kompaktheitssatzes.

Lösungsskizze:

(a) Wir benutzen Aussagenvariablen p_{ik}^d für $d \in D$ und $1 \leq i, k \leq n$, die die folgende intuitive Bedeutung haben: "Auf Koordinate (i,k) liegt ein Stein vom Typ d."

$$\bigvee_{d \in D} p_{ik}^d \qquad \text{für alle } i, k$$

$$\bigwedge_{d \neq e} \neg(p_{ik}^d \wedge p_{ik}^e) \qquad \text{für alle } i, k$$

$$\bigvee_{(d,e) \in H} (p_{ik}^d \wedge p_{(i+1)k}^e) \qquad \text{für alle } i, k$$

$$\bigvee_{(d,e) \in V} (p_{ik}^d \wedge p_{i(k+1)}^e) \qquad \text{für alle } i, k$$

(b) Sei Φ eine Formelmenge wie oben, wobei aber i und k beliebige natürliche Zahlen sind. Φ ist genau dann erfüllbar, wenn sich die Ebene parkettieren lässt.

Um zu zeigen, dass Φ erfüllbar ist, verwenden wir den Kompaktheitssatz. Sei $\Psi \subseteq \Phi$ eine endliche Teilmenge. Dann gibt es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass in $\Psi \subseteq \Phi_m$. Da sich das $m \times m$ Quadrat nach Voraussetzung parkettieren läßt, hat Φ_m und damit auch Ψ ein Modell. Also ist jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar. Aufgrund des Kompaktheitssatzes ist dann auch Φ erfüllbar.

(c) Wir konstruieren einen Baum $\mathcal{B}$ wie folgt:

- Auf der n-ten Ebene gibt es einen Knoten für jede gültige Belegung von $n \times n$.
- Von einem Knoten v auf der n-ten Ebene gibt es eine Kante zu einem Knoten v' auf der $n+1$-ten Ebene genau dann wenn die Belegung von v' die Belegung von v fortsetzt.

Diese Konstruktion beschreibt einen Baum, weil jeder Knoten einen eindeutigen Vorgängerknoten hat. Den Vorgängerknoten eines Knotens auf der n-ten findet man, indem man nur die Teilbelegung auf $(n-1) \times (n-1)$ betrachtet.

Der Baum $\mathcal{B}$ ist endlich verzweigt, weil es nur endlich viele Belegung von $n \times n$ gibt. Nach Voraussetzung gibt es für jedes n eine Belegung von $n \times n$, d.h. auf jeder Ebene gibt es einen Knoten. Damit ist $\mathcal{B}$ unendlich. Nach Lemma von König gibt es nun einen unendlichen Pfad in $\mathcal{B}$. Dieser Pfad beschreibt eine Belegung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, da sich längs eine Pfades die Belegungen fortsetzen.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

(a) Überprüfen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode, ob die folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(q \vee s) \wedge (p \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (q \to (r \to s)) \wedge (r \vee s) \wedge ((p \wedge s) \to r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

(b) Weisen Sie mit Hilfe der Resolutionsmethode die folgende Folgerungsbeziehung nach:

$$(p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \models (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \to 0)$$

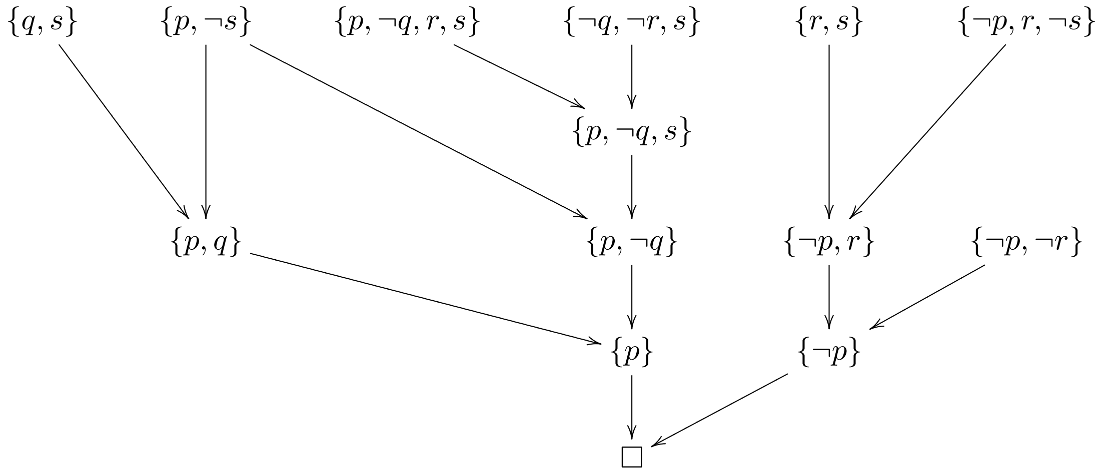
(c) Bestimmen Sie das minimale Modell der folgenden Horn-Formelmenge:

$$H_0 = \{(p \wedge t) \to s, \quad r, \quad (q \wedge r) \to s, \quad t \to p, \quad t\}$$

Lösungsskizze:

(a) Klauseln:

$$\{q, s\},\ \{p, \neg s\},\ \{p, \neg q, r, s\},\ \{\neg q, \neg r, s\},\ \{r, s\},\ \{\neg p, r, \neg s\},\ \{\neg p, \neg r\}$$

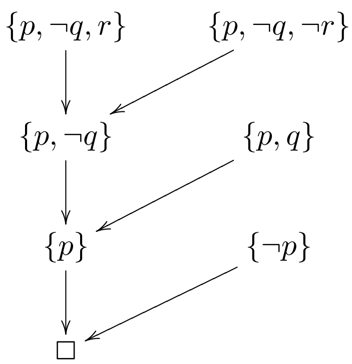


Da $\square$ aus den Klauseln ableitbar ist, ist die Formel unerfüllbar.

(b) Wir zeigen die Unerfüllbarkeit von $\big((p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)\big) \wedge \neg\big((\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee p\big)$. Die Umwandlung dieser Formel in KNF ergibt die folgenden Klauseln:

$$\{p, \neg q, r\},\ \{\neg p, q, r\},\ \{p, \neg q, \neg r\},\ \{p, q\},\ \{\neg p\}$$

Wir zeigen jetzt die Unerfüllbarkeit durch Ableitung von $\square$:



(c) Die Hornklauselmenge H_0 enthält keine negativen Hornklauseln, daher gibt es nach Lemma 5.12 (FGdI Skript zur Aussagenlogik) ein minimales Modell $\mathfrak{I}_0$ der Variablen in H_0. Wir verfahren wie im (konstruktiven) Beweis des Lemmas, konstruieren also schrittweise die Mengen $\mathcal{X}_i$:

$$\mathcal{X}_0 = \emptyset, \quad \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_0 \cup \{r, t\}, \quad \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \cup \{p\}, \quad \mathcal{X}_\infty = \mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_2 \cup \{s\}.$$

Das minimale Modell $\mathfrak{I}_0$ ist demnach geben durch

$$\mathfrak{I}_0(r) = \mathfrak{I}_0(t) = \mathfrak{I}_0(p) = \mathfrak{I}_0(s) = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{I}_0(q) = 0.$$

Aufgabe H2

(a) Für — möglicherweise unendliche — Formelmengen Φ und Ψ schreiben wir

$$\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi,$$

wenn jede Interpretation, die alle Formeln $\varphi \in \Phi$ wahr macht, auch mindestens eine Formel $\psi \in \Psi$ wahr macht. Zeigen Sie, dass $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ impliziert, dass es endliche Teilmengen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$ gibt, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Sei $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$. Eine Interpretation $\mathfrak{I} : \mathcal{V} \to \mathbb{B}$ kann aufgefasst werden als die unendliche Bit-Sequenz $\mathfrak{I}(p_1)\mathfrak{I}(p_2)\mathfrak{I}(p_3)\ldots$

P sei irgendeine Teilmenge aller solchen Sequenzen, so dass sowohl P als auch das Komplement $\overline{P}$ durch (unendliche) AL-Formelmengen spezifiziert werden können, in dem Sinne, dass

$$\begin{aligned} P &= \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Phi\} \\ \overline{P} &= \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \Psi\} \end{aligned}$$

für geeignete $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$.

Zeigen Sie, dass dann sowohl P als auch $\overline{P}$ jeweils schon durch eine einzelne AL-Formel spezifiziert werden können (und also nur von endlichen Abschnitten der Sequenzen abhängen können).

Lösungsskizze:

(a) Wenn $\bigwedge \Phi \models \bigvee \Psi$ gilt, dann hat die Menge $\Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle, wobei $\neg\Psi = \{\neg\psi : \psi \in \Psi\}$. Der Kompaktheitssatz impliziert dann, dass schon eine endliche Teilmenge $\Gamma_0 \subseteq \Phi \cup \neg\Psi$ keine Modelle hat. Setzen wir $\Phi_0 = \{\varphi \in \Phi : \varphi \in \Gamma_0\}$ und $\Psi_0 = \{\psi \in \Psi : \neg\psi \in \Gamma_0\}$, dann heißt das, dass $\Gamma_0 = \Phi_0 \cup \neg\Psi_0$ keine Modelle hat, also $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \Psi_0$.

(b) Da P und $\overline{P}$ disjunkt sind, gilt $\bigwedge \Phi \models \bigvee \neg\Psi$. Nach Aufgabenteil (a) gibt es also endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ und $\Psi_0 \subseteq \Psi$, so dass $\bigwedge \Phi_0 \models \bigvee \neg\Psi_0$. Wir behaupten, dass $P = \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0\}$. $P \subseteq \{\mathfrak{I} : \mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0\}$ ist klar nach Definition von P, also zeigen wir die andere Richtung: $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Phi_0 \Rightarrow \mathfrak{I} \models \bigvee \neg\Psi_0 \Rightarrow \exists\psi \in \Psi\ \mathfrak{I} \models \neg\psi \Rightarrow \mathfrak{I} \notin \overline{P} \Rightarrow \mathfrak{I} \in P$.

Ein analoges Argument mit vertauschten Rollen von Φ uns Ψ liefert eine Formel $\bigwedge \Psi_0$, die $\overline{P}$ definiert.