Formale Grundlagen der Informatik II 1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
01.06.11

Minitest Lösung

a) Sei φ eine syntaktisch korrekte aussagenlogische Formel. Welche der folgenden Aussagen stellen syntaktisch korrekte aussagenlogische Formeln dar?

☒ 1 ☐ 01 ☒ $\neg 1$ ☒ $1 \wedge (\neg 0 \vee \neg\neg\varphi)$

Begründung: Siehe FGdI II Skript, Definition 1.1.

b) Sei $\mathcal{V} = \{p, q\}$ unsere Variablenmenge und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I}(p) = \mathfrak{I}(q) = 0$.
Gilt $\mathfrak{I} \models \big((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)\big)$? ☐ Ja ☒ Nein

Begründung: Die Aussage lässt sich umschreiben zu $\mathfrak{I} \models (p \vee q)$. Dann gilt $(p \vee q)^{\mathfrak{I}} = \max(\mathfrak{I}(p), \mathfrak{I}(q)) = 0$ nach FGdI II Skript, Definition 1.3. Entsprechend lässt sich auch $\big((\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)\big)^{\mathfrak{I}} = 0$ nachweisen.

c) Seien A und B zwei Aussagen, ausgedrückt als aussagenlogische Formeln.

i) A ist hinreichend für B bedeutet ☒ $A \rightarrow B$ ☐ $B \rightarrow A$

ii) A ist notwendig für B bedeutet ☒ $\neg A \rightarrow \neg B$ ☐ $\neg B \rightarrow \neg A$

iii) Für alle Modelle $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models (A \rightarrow B) \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models (\neg B \rightarrow \neg A)$. ☒ Richtig ☐ Falsch

Begründung: i) und ii) entsprechen den Definitionen von notwendigen respektive hinreichenden Bedingungen, und iii) drückt die Kontraposition einer Aussage aus.

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Erstellen Sie die Wahrheitstafel zu folgender Formel:

$$\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee (\neg q \wedge r))$$

Ist die Formel erfüllbar? Ist sie allgemeingültig?

(b) Geben Sie eine Formel zu folgender Wahrheitstafel an:

p	q	r	
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(c) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn höchstens eine der Variablen p, q, r wahr ist.

(d) Geben Sie eine Formel $\varphi(p, q, r, s)$ an, welche genau dann wahr ist, wenn genau drei der Variablen denselben Wert haben.

Lösungsskizze:

(a) Wahrheitstafel:

p	q	r	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee (\neg q \wedge r)$	φ
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Die Formel ist also erfüllbar, aber nicht allgemeingültig.

(b) Eine mögliche Lösung in DNF ist $\varphi := (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$.

(c) Eine mögliche Lösung ist $\varphi := (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$.

(d) Eine mögliche Lösung ist

$$\begin{aligned}\varphi := {} & (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \\ & \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \\ & \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s).\end{aligned}$$

Aufgabe G2

(a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) $\varphi \models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \rightarrow \psi$.

(ii) Wenn $\varphi \models \psi$ und φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iii) Wenn $\varphi \models \psi$ und ψ allgemeingültig (bzw. erfüllbar) ist, dann ist auch φ allgemeingültig (bzw. erfüllbar).

(iv) $\{\varphi, \psi\} \models \vartheta$ genau dann, wenn $\varphi \models \vartheta$ oder $\psi \models \vartheta$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen und Folgerungsbeziehungen.

(i) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$

(ii) $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

(iii) $\{\neg\psi, \psi \rightarrow \varphi\} \models \neg\varphi$

(iv) $\{\neg\varphi, \psi \rightarrow \varphi\} \models \neg\psi$

Lösungsskizze:

(a) (i) Richtig.

$\Rightarrow$: Ist $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, dann gilt entweder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$ oder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$. In dem ersten Fall, gilt $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$, also $\mathfrak{I} \models \varphi \rightarrow \psi$. In dem zweiten Fall, gilt auch $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$, da $\varphi \models \psi$ bedeutet, dass jede Interpretation die φ wahr macht auch ψ wahr macht. Also auch in diesem Fall $(\varphi \rightarrow \psi)^{\mathfrak{I}} = 1$.

$\Leftarrow$: Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \varphi$, also mit $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$. Da auch $\mathfrak{I} \models \varphi \rightarrow \psi$, muss auch gelten $\psi^{\mathfrak{I}} = 1$, also $\mathfrak{I} \models \psi$. Damit ist $\varphi \models \psi$ gezeigt.

(ii) Richtig. $\varphi \models \psi$ heißt, dass jede Interpretation, die φ wahr macht, auch ψ wahr macht. Machen alle Interpretationen φ wahr, dann gilt das also auch für ψ; gibt es eine Interpretation die φ wahr macht, dann ist dieselbe Interpretation ein Modell von ψ.

(iii) Falsch (in beiden Fällen). $0 \models 1$, aber es gibt keine Modelle für 0, und alle Modelle machen 1 wahr.

(iv) Falsch. Ein Gegenbeispiel: $\varphi = p, \psi = \neg p, \vartheta = 0$. Ein weiteres Gegenbeispiel ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\vartheta = p \wedge q$.

(b) (i) Richtig, da für jede Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \neg(\varphi \vee \psi) &\Leftrightarrow \neg(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \\
&\Leftrightarrow (\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{I}} = 0 \quad \text{und} \quad \psi^{\mathfrak{I}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1 \quad \text{und} \quad (\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \\
&\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \neg\varphi \wedge \neg\psi.
\end{aligned}$$

(ii) Falsch. Ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I}(p) = 1$ und $\mathfrak{I}(q) = 0$, dann gilt $(\neg(\varphi \vee \psi))^{\mathfrak{I}} = 0$ und $(\neg\varphi \vee \neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$.

(iii) Falsch. Ist $\varphi = p$, $\psi = q$ und $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I}(p) = 1$ und $\mathfrak{I}(q) = 0$, dann gilt $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$, $(\psi \to \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 0$.

(iv) Richtig. Angenommen $\mathfrak{I}$ ist eine Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \{\neg\varphi, \psi \to \varphi\}$, also $(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ und $(\psi \to \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$. Es folgt $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$. Da $(\neg\psi \vee \varphi)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ oder $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$, folgt $(\neg\psi)^{\mathfrak{I}} = 1$ wie gewünscht.

Aufgabe G3 (KNF, DNF)
Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n(p_1, \dots, p_{2n}) := \bigwedge_{i=1}^{n} \neg(p_{2i-1} \leftrightarrow p_{2i})$$

(siehe Beispiel 3.9 im Skript). Zeigen Sie, dass

(a) φ_n genau 2^n verschiedene Modelle hat;
(b) φ_n äquivalent zu einer Formel in KNF ist, welche $2n$ Konjunktionsglieder besitzt;
(c) jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder hat.

Lösungsskizze:

(a) Für jedes $i \leq n$ muss genau eine der Variablen p_{2i-1} und p_{2i} wahr sein. Das heißt, dass man die Wahrheitswerte der p_{2i} frei wählen kann und die Werte der p_{2i-1} durch diese Wahl festgelegt sind. Also gibt es genau so viele Modelle, wie es Funktionen $\{1, \dots, n\} \to \mathbb{B}$ gibt. Dies sind 2^n.

(b) $\varphi_n \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} [(\neg p_{2i-1} \vee \neg p_{2i}) \wedge (p_{2i-1} \vee p_{2i})]$, da $\neg(q \leftrightarrow r) \equiv (\neg q \vee \neg r) \wedge (q \vee r)$.

(c) Angenommen, es gibt eine zu φ_n äquivalente Formel $\bigvee_{i=1}^{m} \psi_i$ in DNF mit $m < 2^n$ Disjunktionsgliedern. Für jedes Modell $\mathfrak{I}$ von φ_n muss es ein Disjunktionsglied ψ_k geben mit $\mathfrak{I} \models \psi_k$. Da es weniger Disjunktionsglieder als Modelle von φ_n gibt, muss es also ein Disjunktionsglied ψ_k geben, das von mindestens zwei Modellen von φ_n wahrgemacht wird.

Da ψ_k eine Konjuktion von Literalen ist und mindestens zwei Modelle hat, gibt es mindestens eine Variable p_i, so dass weder p_i noch $\neg p_i$ in ψ_k vorkommen. Wir wählen ein Modell $\mathfrak{I}$ von ψ_k. Sei $\mathfrak{I}'$ jetzt die Interpretation, die überall mit $\mathfrak{I}$ übereinstimmt, aber nur auf p_i einen anderen Wert annimmt. Dann ist $\mathfrak{I}'$ auch ein Modell von ψ_k und damit von φ_n. Aber φ_n kann nicht zwei Modelle haben, die sich nur an einer Stelle unterscheiden. Widerspruch! Also hat jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n Disjunktionsglieder.

Hausübung

Aufgabe H1 (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass es zu jeder aussagenlogischen Formel φ jeweils eine äquivalente Formel φ' gibt, sodass

(a) φ' nur die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ und keine Konstanten enthält. (Welche Eigenschaft muss hierfür die Variablenmenge haben?)

(b) φ' nur den Junktor $\rightarrow$ und die Konstante 0 enthält. (Wir fassen hier den Junktor $\rightarrow$ nicht als Abkürzung auf.)

Lösungsskizze:

(a) Wir wissen, dass $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ und demzufolge auch $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ gilt. Weiterhin gilt $p_1 \wedge \neg p_1 \equiv 0$ und $\neg(p_1 \wedge \neg p_1) \equiv 1$. (Dafür brauchen wir aber mindestens eine Variable, also $\mathcal{V} \neq \emptyset$.) Wir definieren nun induktiv eine Abbildung $J : \mathrm{AL}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathrm{AL}(\mathcal{V})$ durch:

$$\begin{aligned} J(0) &:= p_1 \wedge \neg p_1 \\ J(1) &:= \neg(p_1 \wedge \neg p_1) \\ J(\varphi \wedge \psi) &:= \varphi \wedge \psi \\ J(\varphi \vee \psi) &:= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ J(\neg\varphi) &:= \neg\varphi \end{aligned}$$

Offensichtlich enthält $J(\varphi)$ nur die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ und keine Konstanten. Dass $J(\varphi) \equiv \varphi$ kann leicht aus obigen Bemerkungen mittels Induktion gezeigt werden.

(b) Wir gehen analog zu Teil (a) vor:

$$\begin{aligned} J(0) &:= 0 \\ J(1) &:= 0 \rightarrow 0 \\ J(\varphi \wedge \psi) &:= (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow 0)) \rightarrow 0 \\ J(\varphi \vee \psi) &:= (\varphi \rightarrow 0) \rightarrow \psi \\ J(\neg\varphi) &:= \varphi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Aus der Wertetabelle für $\rightarrow$ liest man leicht ab, dass $0 \rightarrow 0 \equiv 1$, $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow 0)) \rightarrow 0 \equiv \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \equiv \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \equiv \varphi \wedge \psi$ und $(\varphi \rightarrow 0) \rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \rightarrow \psi \equiv \varphi \vee \psi$. Daraus kann man mit Induktion zeigen, dass $J(\varphi) \equiv \varphi$ gilt.

Aufgabe H2 (4 Punkte)

Definiere die Operation $\oplus$ (Exklusiv-Oder, XOR, Parity) durch $(p \oplus q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$. Sei $\varphi \in \mathcal{B}_n$ eine beliebige Formel in DNF, d.h. sie sei von der Form $\varphi(\mathbf{x}) = \bigvee_{i=1}^{m} m_i(\mathbf{x})$ mit $m_i(\mathbf{x}) = \bigwedge_{j=1}^{n} \ell_{i,j}$ als Konjunktion von Literalen $\ell_{i,j} \in \{x_j, \neg x_j\}$. Jedes $m_i(\mathbf{x})$ komme dabei als Term nur genau einmal in φ vor.

(a) Zeigen Sie: $p \wedge (q \oplus r) \equiv (p \wedge q) \oplus (p \wedge r)$.

(b) Drücken Sie die Formel

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

nur durch $\oplus$ und $\wedge$ aus, indem Sie sich überlegen, dass $m_i \vee m_j \equiv m_i \oplus m_j$ für alle m_i, m_j $(i \neq j)$ gilt. Wie können Sie $\neg x$ nur durch Operationen $\wedge, \oplus$ und Konstanten $0, 1$ darstellen? Was fällt Ihnen bezüglich des Auftretens von Teilformeln auf? Verkürzen Sie Ihre Formel so weit wie möglich und begründen Sie, warum dies korrekt ist.

Lösungsskizze:

(a) Wahrheitstafel oder Ausnutzung von $(p \oplus q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ und Umformungsregeln.

(b) Jedes m_i kodiert eine Zeile der Wahrheitstabelle von φ, wodurch gilt $m_i \neq m_j$ für alle $i \neq j$. Insbesondere können damit nie m_i, m_j gleichzeitig wahr werden (d.h. unter dem gleichen Modell $\mathfrak{I}$ wahr sein). Damit ist $m_i \wedge m_j$ nie erfüllbar und es gilt

$$m_i \vee m_j \equiv m_i \oplus m_j \oplus (m_i \wedge m_j) \equiv m_i \oplus m_j \oplus 0 \equiv m_i \oplus m_j,$$

wie an der Wahrheitstabelle abzulesen ist, in der der Fall $\mathfrak{I}(m_i) = \mathfrak{I}(m_j) = 1$ niemals auftritt. Zur ausstehenden Umformung der Formel:

$$\begin{aligned}
(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) &\equiv ((1 \oplus p) \wedge q \wedge (1 \oplus r)) \vee (p \wedge (1 \oplus q) \wedge r) \\
&\overset{\text{(a)}}{\equiv} ((q \oplus (p \wedge q)) \wedge (1 \oplus r)) \oplus (p \wedge r) \oplus (p \wedge q \wedge r) \\
&\equiv q \oplus (q \wedge r) \oplus (p \wedge q) \oplus (p \wedge q \wedge r) \oplus (p \wedge r) \oplus (p \wedge q \wedge r) \\
&\overset{(\star)}{\equiv} q \oplus (q \wedge r) \oplus (p \wedge q) \oplus (p \wedge r).
\end{aligned}$$

Die Verkürzung in $(\star)$ gilt, da $t \oplus t = 0$, oder anders gesagt: Je zwei Vorkommen von t kürzen sich gegenseitig weg. Insbesondere können bei dieser Art der Umwandlung von DNF in eine Formel über $\wedge$ und $\oplus$ Konjunktionen von Variablen mehrfach auftreten, bevor sie mittels $(\star)$ gekürzt werden.

Alternativ (wenngleich nicht durch die Aufgabenstellung nahegelegt) kann die Formel

$$(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

auch durch Aufstellen einer Wahrheitstabelle in der Form $\bigwedge_i (x_{j_{1,i}} \oplus \cdots \oplus x_{j_{i,i}})$ ausgedrückt und entsprechend ausreduziert werden.