Formale Grundlagen der Informatik I
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **SS 2011**
Prof. Dr. Martin Ziegler **11.05.11**
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

Minitest Lösung

a) Sei $\mathscr{A}$ ein DFA. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☒ Es gibt bis auf Isomorphie genau einen minimalen DFA, der die gleiche Sprache wie $\mathscr{A}$ erkennt. (Bis auf Isomorphie eindeutig bedeutet in diesem Fall, bis auf Umbenennung von Zuständen.)

☐ Es gibt im Allgemeinen mehrere nicht isomorphe DFAs, die minimal sind und die gleiche Sprache wie $\mathscr{A}$ erkennen.

Begründung: Es gibt einen eindeutigen Minimalautomaten, siehe Skript 2.4.3.

b) Sei $\mathscr{A}$ jetzt ein NFA. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

☐ Es gibt bis auf Isomorphie genau einen minimalen NFA, der die gleiche Sprache wie $\mathscr{A}$ erkennt.

☒ Es gibt im Allgemeinen mehrere nicht isomorphe NFAs, die minimal sind, und die gleiche Sprache wie $\mathscr{A}$ erkennen.

Begründung: Die folgenden NFAs beschreiben die gleiche Sprache, sind nicht isomorph und haben die minimale Anzahl an Zuständen.

D.h. $\mathscr{B}$ wäre auch ein „Minimalautomat“ von $\mathscr{A}$. Da bei NFAs dieser nicht eindeutig bestimmt ist, spricht man bei einen NFA mit der minimalen Anzahl von Zuständen in der Regel nicht von einem Minimalautomaten.

c) Sei $\mathscr{A}$ ein DFA. Es gibt einen Algorithmus, der entscheidet, ob $\mathscr{A}$ minimal ist. ☒ Richtig ☐ Falsch.
Begründung: Man wende den Minimierung-Algorithmus auf $\mathscr{A}$ an. Genau dann wenn $\mathscr{A}$ sich nicht ändert ist $\mathscr{A}$ minimal.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Myhill-Nerode, Pumping Lemma)
Zeigen Sie sowohl via Myhill-Nerode als auch via Pumping Lemma, dass die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.

Lösungsskizze:

- (Myhill-Nerode) Siehe Skript, Beispiel 2.4.8, S. 36
- (Pumping Lemma) Nehmen wir an, dass L regulär sei. Sei n die Konstante für die Sprache L aus dem Pumping Lemma. Betrachte das Wort

  $$x = a^n b^n.$$

  Laut Pumping Lemma gibt es eine Zerlegung von x in $x = u \cdot v \cdot w$ mit $|u \cdot v| \leq n$ und $v \neq \varepsilon$, so dass für jede $m \in \mathbb{N}$ gilt

  $$u \cdot v^m \cdot w \in L. \tag{1}$$

  Da $|u \cdot v| \leq n$, kann $u \cdot v$ nur aus „a" bestehen, d.h.

  $$u = a^j, \quad v = a^k, \quad w = a^{n-k-j} b^n$$

  für ein j und k mit $j + k \leq n$ und $k > 0$,.
  Es gilt nun

  $$u \cdot v^2 \cdot w = a^j \cdot a^{2k} \cdot a^{n-k-j} b^n = a^{n+k} b^n \notin L.$$

  Diese widerspricht (1) für $m = 2$. Damit kann die Annahme, dass L regulär sei, nicht richtig sein und wir können folgern, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe G2 (Regularität)
Beweisen Sie, dass folgender Sprachen nicht regulär sind:

(a) $L_1 = \{a^n b^m \in \{a, b\}^* \mid n > m\}$

(b) $L_2 = \{a^p \in \{a\}^* \mid p \text{ prim}\}$

Lösungsskizze:

(a) Nehmen wir an, dass L_1 regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas, gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $x \in L_1$ mit $|x| \geq n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ schreiben lässt, mit $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so eine natürliche Zahl und betrachte das Wort

$$x = a^{n+1} b^n.$$

Jetzt soll es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L_1$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w$ mindestens so viele b's (nämlich n) wie a's enthält (nämlich $n - k \leq n$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_1$. Wir schliessen, dass L_1 nicht regulär ist.

(b) Sei wieder $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort

$$x = a^l,$$

wobei $l > n + 1$ eine Primzahl ist. Offensichtlich ist $x \in L_2$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$. Aus $|u \cdot v| \leq n$ folgt, dass $|w| > 1$ und $|u \cdot w| > 1$. Wählen wir $m = |u| + |w|$ und $x' = u \cdot v^m \cdot w$. Wir bestimmen die Länge von x':

$$|x'| = |u \cdot v^m \cdot w| = |u| + m|v| + |w| = m(|v| + 1).$$

Weil $m > 1$ und $|v| + 1 > 1$, ist $|x'|$ nicht prim. Das widerspricht $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$. Wir schliessen, dass L_2 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

Aufgabe G3
Sei
$$L = \{ss^{-1}t \mid s, t \in \{a, b\}^+\},$$
wobei s^{-1} die Umdrehung von s bezeichnet (wie auf Übungsblatt 3 definiert).

(a) Zeigen Sie, dass L die Aussage im Pumping Lemma erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass L trotzdem nicht regulär ist.
Tipp: Benutzen Sie den Satz von Myhill-Nerode!

Lösungsskizze:

(a) Wir zeigen, dass L die Behauptung des Pumping Lemmas für $n = 4$ erfüllt. Dafür sei $x = ss^{-1}t$ ein Wort, das zu L gehört, und mindestens Länge 4 hat. Es gibt zwei Möglichkeiten:
  i. s hat Länge 1. Dann hat t mindestens Länge 2. Wir wählen $u := ss^{-1}$, also enthält u die ersten beiden Buchstaben von x. Wähle nun v als den dritten Buchstaben von x und w sei der Rest von x. Da u ein nicht-leeres Palindrom gerader Länge und w nicht leer ist, gilt $uv^m w \in L$ für alle $m \in \mathbb{N}$.
  ii. s hat mindestens Länge 2. Dann wählen wir $u := \varepsilon$ und v der erste Buchstabe von x. w bezeichne wieder den (nicht leeren) Rest von x. Behauptung: Dann gehört $uv^m w = v^m w$ immer zu L. Grund: Für $m > 1$ gilt
$$v^m w = vvv^{m-2}w = s's'^{-1}t'$$
mit $s' = s'^{-1} = v$ und $t' = v^{m-2}w$. Damit ist $v^m w \in L$. Gilt andererseits $m = 0$, dann ist $uv^m w = w$ und w gehört zu L, da $w = s_0 s_0^{-1} v w'$ (für ein $w' \in \{a, b\}^+$), wobei s_0 das Wort s ohne den ersten Buchstaben ist.

(b) Aus dem Satz von Myhill-Nerode folgt, dass es reicht, eine unendliche Menge von Wörtern zu finden, die bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim_L$ paarweise inäquivalent sind. Betrachte die Wörter $\{ab^{2n+1}a \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für $n \neq n'$ gilt $ab^{2n+1}a \not\sim_L ab^{2n'+1}a$, denn $ab^{2n+1}aw \in L$ und $ab^{2n'+1}aw \notin L$ für $w := ab^{2n+1}ab$.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)

(a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und
$$L_1 = \{a^n bc^n \in \Sigma^* \mid n \geq 2\}.$$
Zeigen Sie, dass die Sprache L_1 nicht regulär ist.

(b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und
$$L_2 = \{x \in \Sigma^* \mid 2|x|_a = |x|_b\}.$$
Zeigen Sie, dass die Sprache L_2 nicht regulär ist.

Lösungsskizze:

(a) Nehmen wir an, dass L_1 regulär ist. Wegen des Pumping Lemmas, gibt es dann eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass jedes $x \in L_1$ mit $|x| \geq n$ sich als $x = u \cdot v \cdot w$ schreiben lässt, mit $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, wobei für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so eine natürliche Zahl und betrachte das Wort
$$x = a^n bc^n.$$
Jetzt soll es u, v, w geben, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_1$. Insbesondere soll auch gelten: $u \cdot w \in L_1$ für $m = 0$. Weil $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w$ mehr c's (nämlich n) als a's enthält (nämlich $n - k < n$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_1$. Wir schliessen, dass L_1 nicht regulär ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und betrachte das Wort

$$x = a^n b^{2n}.$$

Offensichtlich $x \in L_2$. Wir überprüfen, ob es u, v, w geben kann, mit $x = u \cdot v \cdot w$, $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ auch $u \cdot v^m \cdot w \in L_2$. Weil $|u \cdot v| \leq n$ und $|v| > 0$, ist v der Form $v = a^k$ mit $k > 0$. Das heißt, dass $u \cdot w$ gleichviel b's enthält wie x (nämlich $2n$), aber weniger als n a's enthält (nämlich $n - k < n$). Das widerspricht $u \cdot w \in L_2$. Wir schliessen, dass L_2 das Pumping Lemma verletzt und deshalb nicht regulär sein kann.

Aufgabe H2

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der regulären Sprachen unter Homomorphismen abgeschlossen ist. D.h. zeigen Sie, dass für einen beliebigen Homomorphismus $h\colon (\Sigma_1^*, \cdot, \varepsilon) \to (\Sigma_2^*, \cdot, \varepsilon)$ und eine beliebige reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma_1^*$ auch die Sprache $h(L) = \{h(w) \in \Sigma_2^* \mid w \in L\}$ regulär ist.

Tipp: Definieren Sie induktiv einen regulären Ausdruck für die Sprache $h(L)$.

(b) Beweisen Sie durch Ausnutzung der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen: Die Sprache

$$L = \{a^n b^l c^n d^m \mid l, m, n \in \mathbb{N}\}$$

ist nicht regulär.

Lösungsskizze:

(a) Wir definieren induktiv die Abbildung $\hat{h}\colon \mathrm{REG}(\Sigma_1) \to \mathrm{REG}(\Sigma_2)$, die einen regulären Ausdruck von L auf einen von $h(L)$ abbildet:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\emptyset) &= \emptyset \\
\hat{h}(a) &= h(a) \quad \text{für alle } a \in \Sigma_1 \\
\hat{h}(\alpha + \beta) &= \hat{h}(\alpha) + \hat{h}(\beta) \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathrm{REG}(\Sigma_1) \\
\hat{h}(\alpha \cdot \beta) &= \hat{h}(\alpha) \cdot \hat{h}(\beta) \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathrm{REG}(\Sigma_1) \\
\hat{h}(\alpha^*) &= \hat{h}(\alpha)^* \quad \text{für alle } \alpha \in \mathrm{REG}(\Sigma_1)
\end{aligned}$$

Dies zeigt $h(L) = h(L(\alpha_L)) = L(\hat{h}(\alpha_L))$ für $L = L(\alpha_L)$, $\alpha_L \in \mathrm{REG}(\Sigma_1)$.

(b) Angenommen L sei regulär. Definiere einen Homomorphismus $h\colon \{a, b, c, d\}^* \to \{a, b\}^*$ durch

$$h(a) = a, \quad h(b) = \varepsilon, \quad h(c) = b, \quad h(d) = \varepsilon.$$

Dann ist auch $h(L) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ regulär. Ein Widerspruch.