Formale Grundlagen der Informatik I
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
27.04.11

Minitest Lösung

a) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? ⊠ Jeder DFA ist ein NFA. □ Jeder NFA ist ein DFA.

Begründung: In einem DFA gibt es für jeden Buchstaben und von jedem Zustand aus *genau eine* Transition. In einem NFA gibt es beliebig viele. Daher ist jeder DFA auch ein NFA aber nicht umgekehrt.

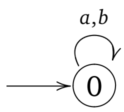
b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Welche Sprache beschreibt der folgende reguläre Ausdruck:

$$(a+b)^*(b+a)^*$$

- □ Alle Wörter, die aus zwei Kopien eine Wortes bestehen, also Wörter der Form ww für ein $w \in \Sigma^*$.
- □ Alle Palindrome, d.h. alle Wörter der Form ww^{-1} für ein $w \in \Sigma^*$, wobei w^{-1} das Wort w umgedreht ist.
- ⊠ Alle Wörter in Σ^*.

Begründung: Sowohl $(a+b)$ also auch $(b+a)$ beschreiben die Sprache $\{a, b\}$. Damit beschreiben dann $(a+b)^*$ und $(b+a)^*$ jeweils Σ^*. Die Aussage folgt dann aus der Beobachtung, dass $\Sigma^* \cdot \Sigma^* = \Sigma^*$.

c) Welcher reguläre Ausdruck beschreibt die gleiche Sprache wie der folgende Automat:



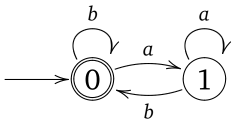
□ $(ab)^*$ □ $(a+b)^*$ ⊠ $\emptyset$ □ $\emptyset^*$

Begründung: Der Automat hat keinen akzeptierenden Zustand, deshalb wird kein Wort akzeptiert, d.h. der Automat erkennt die leere Sprache $\emptyset$. Beachten Sie, dass $L(\emptyset) = \emptyset$ aber $L(\emptyset^*) = \{\varepsilon\}$, siehe Skript Beispiel 2.1.5.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Reguläre Ausdrücke)

(a) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Welche Sprache wird von dem folgenden DFA $\mathscr{A}$ akzeptiert?



(b) Beschreiben Sie $L(\mathscr{A})$ durch einen regulären Ausdruck.

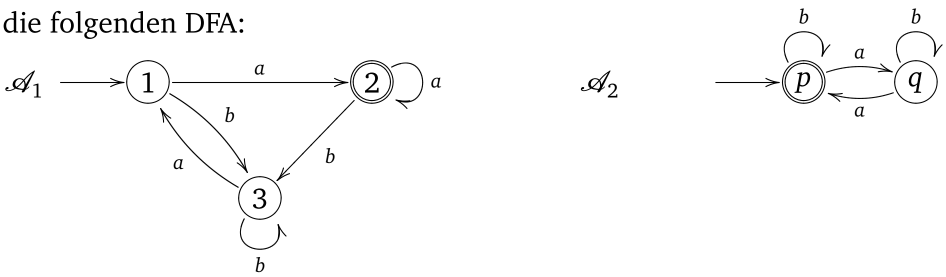
Lösungsskizze:

(a) $L(\mathscr{A})$ besteht aus den a/b-Folgen, in denen nach jedem a irgendwann ein b folgt. Anders gesagt besteht die Sprache aus allen Folgen, die auf b enden und dem leeren Wort.

(b) Mögliche reguläre Ausdrücke sind: $(b + aa^*b)^*$, $(a + b)^*ab^*b + b^*$, oder auch $\emptyset^* + (a + b)^*b$.

Aufgabe G2

Gegeben seien die folgenden DFA:

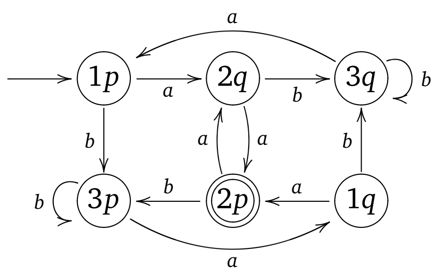


(a) Geben Sie einen DFA an, der $L(\mathscr{A}_1) \cap L(\mathscr{A}_2)$ erkennt.

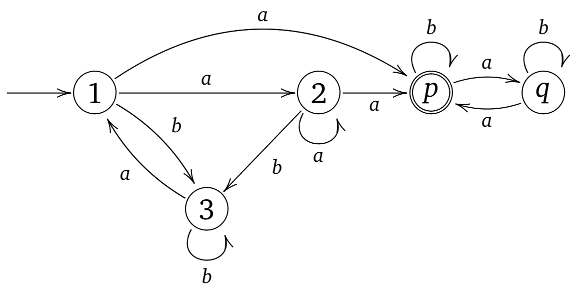
(b) Geben Sie einen NFA an, der $L(\mathscr{A}_1) \cdot L(\mathscr{A}_2)$ erkennt.
Extra: Was ändert sich an der Lösung, wenn der Zustand 1 in $\mathscr{A}_1$ auch akzeptierend ist?

Lösungsskizze:

(a) Wir bilden den Produktautomaten (vgl. Lemma 2.2.11 auf Seite 30 im Skript):



(b) Wir benutzen die Konstruktion aus Lemma 2.2.14(a) auf Seite 31 im Skript:



Falls Zustand 1 in $\mathscr{A}_1$ auch akzeptierend ist, muss in diesem Automaten der Zustand 1 auch akzeptierend sein und es muss eine a-Transition von 1 nach q sowie eine b-Transition von 1 nach p und eine a-Transition von 3 nach p hinzugefügt werden (warum?).

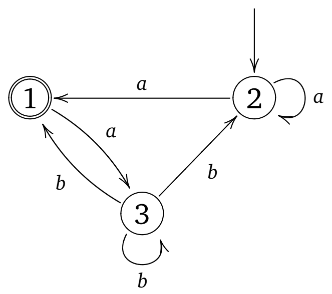
Aufgabe G3 (NFA-Umkehrung)
Für ein Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ wird w^{-1} durch $a_n \dots a_1$ definiert (d.h. w wird rückwärts gelesen). Die Sprache $\mathrm{rev}(L)$ ist definiert als

$$\mathrm{rev}(L) := \{w^{-1} \in \Sigma^* \mid w \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass für jede reguläre Sprache L die Umkehrung $\mathrm{rev}(L)$ regulär ist, indem Sie zeigen, wie aus einem NFA, der die Sprache L erkennt, ein NFA, der die Sprache $\mathrm{rev}(L)$ erkennt, allgemein konstruiert werden kann.
Hinweise:

- Überlegen Sie sich dazu beispielhaft für den Automaten $\mathscr{A}_1$ aus Aufgabe G2 zunächst, wie solch ein „umgekehrter NFA“, erkennend die Sprache $\mathrm{rev}(L(\mathscr{A}_1))$, auszusehen hat.
- Überlegen Sie sich, wie sich die Umkehrung eines NFA mit mehreren akzeptierenden Zuständen durch Ausnutzung der Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen auf den Fall mit nur einem akzeptierenden Zustand zurückführen lässt.

Lösungsskizze: Zum 1. Hinweis: Wir drehen alle Transitionen um und vertauschen den Anfangszustand und den akzeptierenden Zustand (der in diesem Fall eindeutig ist). Als Ergebnis bekommen wir den folgenden NFA mit 2 als Anfangszustand und 1 als akzeptierendem Zustand:



Sei $\mathscr{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, A)$ ein NFA. Für jedes $a \in A$ definieren wir

$$\mathscr{A}_a = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, \{a\}).$$

Das heißt: $\mathscr{A}_a$ ist wie $\mathscr{A}$, aber hat nur a als akzeptierenden Zustand. Wir haben $L(\mathscr{A}) = \bigcup_{a \in A} L(\mathscr{A}_a)$ und $\mathrm{rev}(L(\mathscr{A})) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{rev}(L(\mathscr{A}_a))$. Weil reguläre Sprachen unter Vereinigung abgeschlossen sind, brauchen wir nur einzusehen, dass $\mathrm{rev}(L(\mathscr{A}))$ regulär ist für jeden Automat $\mathscr{A}$ mit nur einem akzeptierenden Zustand.
Sei also $\mathscr{A} = (\Sigma, Q, q_0, \Delta, \{a\})$ ein NFA mit einem akzeptierendem Zustand, der die Sprache L erkennt. Wir bestimmen einen Automat $\mathscr{A}^{\mathrm{rev}}$, der genau $\mathrm{rev}(L)$ erkennt:

$$\mathscr{A}^{\mathrm{rev}} = (\Sigma, Q, a, \Delta^{\mathrm{rev}}, \{q_0\}),$$

wobei

$$(q, x, q') \in \Delta^{\mathrm{rev}} \Leftrightarrow (q', x, q) \in \Delta.$$

Man beweist jetzt mit Induktion über n, dass es einen Lauf von q_0 nach q_n auf w in $\mathscr{A}$ genau dann gibt, wenn es einen Lauf von q_n nach q_0 auf w^{-1} in $\mathscr{A}^{\mathrm{rev}}$ gibt. Daraus folgt dann, dass $L(\mathscr{A}^{\mathrm{rev}}) = \mathrm{rev}(L)$. Wir schließen, dass auch $\mathrm{rev}(L)$ regulär ist.

Hausübung

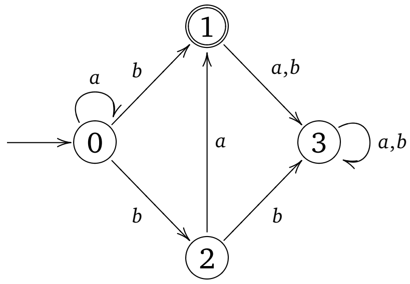
Aufgabe H1 (DFAs, NFAs und Potenzmengen-Trick) (8 Punkte)

(a) Sei $L \subseteq \{a, b\}^*$ die Menge von Wörtern, die irgendwo zwei a's nebeneinander haben, und sei M das Komplement (d.h., die Menge von Wörter die niemals zwei a's nebeneinander haben).

(i) Bestimmen Sie reguläre Ausdrücke für L und M.

(ii) Bestimmen Sie DFAs, die genau die Sprache L bzw. die Sprache M erkennen.

(b) Betrachten Sie den folgenden NFA:



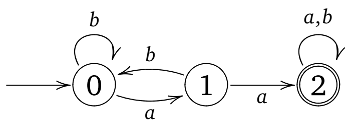
Bestimmen Sie einen DFA, der genau dieselbe Sprache erkennt. Geben Sie neben dem Automaten selbst auch die im Zuge der Lösung erstellte Tabelle an (siehe Skript, Beispiel 2.2.10).

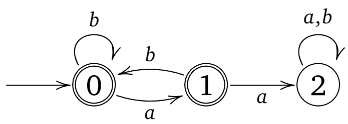
Lösungsskizze:

(a) (i)

$$
\begin{aligned}
L &= L((a+b)^* aa(a+b)^*) \\
M &= L((b+ba)^* + a(b+ba)^*)
\end{aligned}
$$

(ii) Der linke Automat erkennt L, der rechte M.

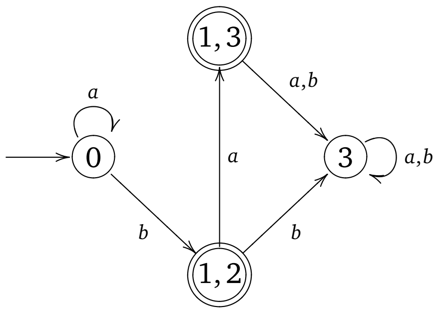




(b)

δ	a	b
$\{0\}$	$\{0\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{3\}$
$\{1,3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$
$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$

Die erreichbare Zuständen sind $\{0\}, \{1,2\}, \{1,3\}$ und $\{3\}$. Akzeptierend sind $\{1,2\}$ und $\{1,3\}$:



Aufgabe H2 (Logik)
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass

$$(\exists x \in \mathbb{N})\,[\,f(f(x)+1) \neq x\,].$$

(b) Geben Sie eine endliche Liste $t_1, \ldots, t_n$ von aus 0, f und $+1$ gebildeten Zahlen an, so dass für alle f

$$\bigvee_{i=1}^{n} [\,f(f(t_i)+1) \neq t_i\,]$$

gilt.

Lösungsskizze:

(a) Nehmen wir an, die Aussage sei falsch. Dann gilt für jede natürliche Zahl x, dass

$$f(f(x)+1) = x.$$

Dann muss einerseits f injektiv sein, weil $f(a) = f(b)$ impliziert, dass $f(f(a)+1) = f(f(b)+1)$ und $a = b$.

Andererseits muss $f \restriction \mathbb{N}_{>0}$ surjektiv sein und kann f deshalb nicht injektiv sein, weil der Wert $f(0)$ schon im Bild von $f \restriction \mathbb{N}_{>0}$ liegt.

(b) Der Beweis kann auch so verstanden werden: wir versuchen ein x zu finden, so dass $f(f(x)+1) \neq x$.

Wir versuchen $f(0)$. Falls $f(f(f(0))+1) \neq f(0)$, dann sind wir erfolgreich mit $f(0)$. Falls $f(f(f(0))+1) = f(0)$, dann haben wir für $a = f(f(0))+1$ und $b = 0$, dass $f(a) = f(b)$. Ist $f(f(a)+1) \neq a$, dann sind wir erfolgreich mit a. Ist $f(f(b)+1) \neq b$, dann sind wir erfolgreich mit b. Ist sowohl $f(f(a)+1) = a$ und $f(f(b)+1) = b$ dann folgt aus $f(a) = f(b)$, dass $a = b$, also $f(f(0))+1 = 0$. Aber das ist unmöglich, weil $f(f(0))$ eine natürliche (nicht-negative) Zahl ist.

Also: $t_1 = f(0), t_2 = f(f(0))+1, t_3 = 0$.