Formale Grundlagen der Informatik I
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

SS 2011
20.04.11

Minitest Lösung

a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Die Relation $R_1 = \{(v, w) \in \Sigma^* \times \Sigma^* \mid v \text{ ist Präfix von } w\}$ ist
☒ reflexiv ☐ symmetrisch ☒ transitiv

Begründung: Reflexiv, da jedes Wort Präfix von sich selbst ist.
Nicht symmetrisch, denn jedes (nicht leere) Wort $a \in \Sigma^*$ ist Präfix von $a \cdot a$, aber nicht umgekehrt.
Transitiv, denn wenn u Präfix von v und v Präfix von w ist, dann gilt per Definition $v = u \cdot v'$ für ein Wort v' und $w = v \cdot w'$ für ein Wort w'. Zusammen also $w = u \cdot v' \cdot w'$ und damit ist u auch Präfix von w.

b) Die Relation $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \cdot b \neq 0\}$ ist ☐ reflexiv ☒ symmetrisch ☒ transitiv

Begründung: Nicht reflexiv: $(0, 0) \notin R_2$. Symmetrie und Transitivität folgen aus der Beobachtung, dass für alle $(a, b) \in R_1$ gilt $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

c) Seien A und B endliche Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion.

- Ist f injektiv, so folgt stets ☒ $|A| \leq |B|$ ☐ $|A| \geq |B|$

  Begründung: Wenn f injektiv ist, dann gibt es für jedes $y \in B$ maximal ein $x \in A$, so dass $f(x) = y$. Damit kann es nicht mehr Elemente in A geben als in B.

- Ist f surjektiv, so folgt stets ☐ $|A| \leq |B|$ ☒ $|A| \geq |B|$

  Begründung: Wenn f surjektiv ist, dann gibt es für jedes $y \in B$ mindestens ein $x \in A$, so dass $f(x) = y$. Damit kann A nicht weniger Elemente als B enthalten.

Gruppenübung

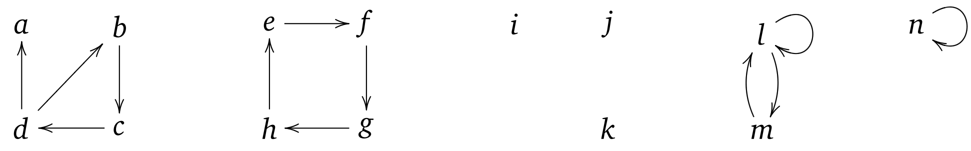
Aufgabe G1 (Wahrheitswertetafeln)
Zeigen Sie anhand von Wahrheitswertetafeln, dass die folgenden aussagenlogischen Formeln äquivalent sind:

$$\neg(p \to q), \qquad p \wedge \neg q, \qquad (p \vee q) \wedge \neg q.$$

Lösungsskizze:

p	q	$p \to q$	$\neg(p \to q)$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \neg q$
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0

Aufgabe G2 (Graphhomomorphismen)
Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge V von Knoten und einer Teilmenge $E \subseteq V \times V$ von Kanten. Gegeben seien die folgenden fünf gerichteten Graphen:



G_1 G_2 G_3 G_4 G_5

Der Graph $G_1 = (V_1, E_1)$ ist beispielsweise wie folgt formal gegeben:

$$V_1 = \{a, b, c, d\}$$
$$E_1 = \{(d, a), (d, b), (b, c), (c, d)\}$$

Geben Sie an, zwischen welchen der Graphen Homomorphismen existieren, und geben Sie auch gegebenenfalls einen Homomorphismus an.

Lösungsskizze: Zur Erinnerung: Ein Homomorphismus zwischen zwei Graphen $G = (V, E), G' = (V', E')$ ist eine Abbildung $\varphi \colon V \to V'$, für die gilt

$$(x, y) \in E \Rightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in E', \tag{1}$$

siehe Skript 1.1.5.

- Von dem Graphen G_3 gibt es Homomorphismen in alle anderen Graphen. Das liegt daran, dass G_3 keine Kanten enthält, die Bedingung (1) damit immer wahr ist und für φ eine beliebige Abbildung gewählt werden kann. Z.B. wäre ein Homomorphismus von G_3 zu G_1 die Abbildung $\varphi \colon V_3 \to V_1$ mit $\varphi(x) = a$.

  Es gibt keinen Homomorphismus in den Graphen G_3, denn jeder andere Graph besitzt mindestens eine Kante, die nach (1) wieder auf eine Kante in G_3 abgebildet werden müsste.
- G_1, G_2: Angenommen es gäbe einen Homomorphismus φ von G_1 nach G_2. Da G_2 symmetrisch ist dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\varphi(b) = f$ gilt. Da $(b, c) \in E_1$ müsste auch $\varphi(c) = g$ gelten und damit auch $\varphi(d) = h$. Da $(d, b) \in E_1$ müsse jetzt auch $(h, f) \in E_2$. Das ist aber nicht der Fall. Also existiere ein solcher Homomorphismus nicht.

  Ähnlich kann man auch sehen, dass es keine Homomorphismus von G_2 nach G_1 gibt.
- G_1 nach G_4: Setze $\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(d) = l$, $\varphi(c) = m$.
- G_2 nach G_4: Setze $\varphi(e) = \varphi(f) = \varphi(g) = l$, $\varphi(h) = m$.
- G_4 nach G_5: Setze $\varphi(l) = \varphi(m) = n$.
- G_4, G_5 nach G_1, G_2: Sowohl G_1 als auch G_2 enthalten keine Schleifen. Deswegen kann es keine Homomorphismus von G_4 oder G_5 nach G_1 oder G_2 geben.
- G_5 nach G_4: Setze $\varphi(n) = l$.

Alle anderen Aussagen (beispielsweise die Existenz eines Homomorphismus von G_1 nach G_5) folgen per Transitivität aus den obigen.

Aufgabe G3
Seien X, Y beliebige Mengen und $p : Y \to X$ eine surjektive Abbildung. Zeigen Sie, dass durch

$$y_0 \sim y_1 :\Longleftrightarrow p(y_0) = p(y_1)$$

eine Äquivalenzrelation auf Y definiert wird. Zeigen Sie auch, dass es ein Bijektion zwischen $Y/{\sim}$ und X gibt.

Lösungsskizze: Reflexivität: $y \sim y \Leftrightarrow p(y) = p(y)$. Symmetrie: $y \sim z \Leftrightarrow p(y) = p(z) \Leftrightarrow z \sim y$. Transitivität: $x \sim y,\ y \sim z \Leftrightarrow p(x) = p(y) = p(z) \Leftrightarrow x \sim z$.
Wir definieren $t : Y/\sim \to X$ durch

$$t([y]) = p(y).$$

Die Abbildung t is wohldefiniert, da

$$[y_0] = [y_1] \Rightarrow y_0 \sim y_1 \Rightarrow p(y_0) = p(y_1).$$

t ist darüber hinaus injektiv, da

$$t([y_0]) = t([y_1]) \Rightarrow p(y_0) = p(y_1) \Rightarrow y_0 \sim y_1 \Rightarrow [y_0] = [y_1].$$

Für jedes $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $p(y) = x$ (p ist surjektiv). Es folgt $t([y]) = p(y) = x$, und deshalb ist t surjektiv.

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
L und M seien Σ-Sprachen.

(a) Zeigen Sie, dass $L \subseteq L^*$ und $\big(L \subseteq M^* \Rightarrow L^* \subseteq M^*\big)$.
(b) Schließen Sie aus (a), dass $(L^*)^* = L^*$ und $\big(L \subseteq M \Rightarrow L^* \subseteq M^*\big)$.
(c) Zeigen Sie, dass $(L \cup M)^* = (L^*M^*)^*$.

Lösungsskizze:

(a) Wir erinnern an die Definition des Sternoperators:

$$L^* = \{l_1 \cdot \ldots \cdot l_n : l_1, \ldots, l_n \in L, n \in \mathbb{N}\}.$$

Für $n = 0$, heißt das, dass $\varepsilon \in L^*$ und für $n = 1$, dass $L \subseteq L^*$.
Nehmen wir jetzt an, dass $L \subseteq M^*$, und sei $l \in L^*$. Das heißt, dass l sich schreiben lässt als $l = l_1 \cdot \ldots \cdot l_n$ mit $l_1, \ldots, l_n \in L$. Da $L \subseteq M^*$ ist jedes l_i Element von M^* und kann deshalb als $l_i = m_i^1 \cdot \ldots \cdot m_i^{k_i}$ geschrieben werden. Deshalb ist

$$l = m_1^1 \cdot \ldots \cdot m_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot m_n^1 \cdot \ldots \cdot m_n^{k_n} \in M^*.$$

(b) Wir schließen, dass $L \subseteq M^* \Rightarrow L^* \subseteq M^*$. Aus $L \subseteq M$ folgt deshalb, dass $L \subseteq M \subseteq M^*$ und $L^* \subseteq M^*$. Aus $L^* \subseteq L^*$ folgt $(L^*)^* \subseteq L^*$, und die andere Richtung $L^* \subseteq (L^*)^*$ ist ein Spezialfall von $M \subseteq M^*$ (mit $M = L^*$).

(c) $(L \cup M)^* \subseteq (L^*M^*)^*$: es genügt zu beweisen, dass $L \cup M \subseteq L^*M^*$. Sei deshalb $w \in L \cup M$. Dann gilt $w \in L$ oder $w \in M$. Nehmen wir erst an, dass $w \in L$. Dann auch $w \in L^*$, und $w = w \cdot \varepsilon \in L^*M^*$. Der Fall $w \in M$ geht analog.
$(L^*M^*)^* \subseteq (L \cup M)^*$: es genügt zu beweisen, dass $L^*M^* \subseteq (L \cup M)^*$. Aus $L \subseteq L \cup M \subseteq (L \cup M)^*$ folgt, dass $L^* \subseteq (L \cup M)^*$. Analog gilt auch $M^* \subseteq (L \cup M)^*$, woraus $L^*M^* \subseteq (L \cup M)^*$ folgt. (Hier haben wir das folgende Prinzip verwendet:

$$L \subseteq N^*, M \subseteq N^* \Rightarrow LM \subseteq N^*.$$

Beweis: nehmen wir an $L \subseteq N^*$ und $M \subseteq N^*$, und sei $w \in LM$. Letztes heißt, dass $w = lm$ mit $l \in L$ und $m \in M$. Weil $L \subseteq N^*$ und $M \subseteq N^*$, können wir $l = n_1 \cdot \ldots n_j$ und $m = n'_1 \cdot \ldots n'_k$ schreiben mit $n_i, n'_i \in N$. Deshalb $w = n_1 \cdot \ldots n_j \cdot n'_1 \cdot \ldots n'_k \in N^*$.)

Aufgabe H2 (Isomorphie von Graphen) (2 Punkte)
Finden Sie zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$, so dass es einen bijektiven Homomorphismus $\varphi\colon V_1 \to V_2$ gibt, ohne dass G_1 und G_2 isomorph sind.

Extra: Kann es zwei Graphen G_1 und G_2 geben, so dass es bijektive Homomorphismen $\varphi\colon V_1 \to V_2$ und $\psi\colon V_2 \to V_1$ gibt, ohne dass G_1 und G_2 isomorph sind? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungsskizze: Das einfachste Beispiel, in dem zwar $\varphi : V_1 \to V_2$ ein bijektiver Homomorphismus ist, jedoch φ^{-1} **keinen** Homomorphismus darstellt, ist folgendes: Sei G_1 ein Graph mit einem Knoten und keiner Kante, und G_2 ein Graph mit einem Knoten und einem Loop. Ein Homomorphismus von Graphen φ^{-1} hat die Eigenschaft, dass wenn a und b Knoten in G_2 sind die durch eine Kante verbunden sind, die Knoten $\varphi^{-1}(a)$ und $\varphi^{-1}(b)$ in G_1 auch verbunden sein müssen. Deshalb kann es keinen Homomorphismus von G_2 nach G_1 geben und sind G_1 und G_2 nicht isomorph.
Zum Extra: Nein. Ein bijektiver Homomorphismus $\varphi\colon G_1 \to G_2$ bildet die Kanten in G_1 injektiv auf die Kanten in G_2 ab. Wenn es also einen bijektiven Homomorphismus $\varphi\colon G_1 \to G_2$ gibt, hat G_1 nicht mehr Kanten als G_2. Gibt es bijektiven Homomorphismen $\varphi\colon G_1 \to G_2$ und $\psi\colon G_2 \to G_1$, dann haben G_1 und G_2 gleichviel Kanten. Also bildet φ die Kanten in G_1 *bijektiv* auf die Kanten in G_2 ab. (Hier verwenden wir das Schubfachprinzip: eine injektive Abbilding $\varphi\colon A \to B$ zwischen endlichen Mengen A und B die gleichviele Elemente haben ist auch bijektiv.) Deshalb ist auch φ^{-1} ein Homomorphismus und sind G_1 und G_2 isomorph.