Formale Grundlagen der Informatik I
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik **SS 2011**
Prof. Dr. Martin Ziegler
Alexander Kreuzer
Carsten Rösnick

Minitest Lösung

a) Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ $\emptyset \in M$
- ☒ $\emptyset \subseteq M$
- ☐ $\{\emptyset\} \in M$

Begründung: Die leere Menge ($\emptyset$) ist nicht in M enthalten, weil M nach Voraussetzung nur $1, 2, 3$ enthält. ($\emptyset \in M$ würde z.B. gelten, wenn $M = \{\emptyset, 1, 2, 3\}$). Aus dem gleiche Grund ist auch die Menge, die nur $\emptyset$ enthält, also $\{\emptyset\}$, nicht in M enthalten. Die leere Menge ist aber eine Teilmenge von M, weil für jedes Element der leeren Menge gilt, dass es auch Element von M ist.

b) Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation auf der Menge $\{a, b, c, d\}$, die durch $a \sim b$, $c \sim b$, $a \sim c$, $a \nsim d$ gegeben ist. Welchen Index hat diese Äquivalenzrelation?

Antwort: 2
Begründung: Da $\sim$ nach Voraussetzung eine Äquivalenzrelation ist, gilt $[a]_\sim = \{a, b, c\}$. Da Äquivalenzklassen entweder disjunkt oder gleich sind folgt mit $a \nsim d$, dass $[d]_\sim = \{d\}$. Folglich gilt: $\text{index}(\{a, b, c, d\}/\sim) = |\{[a]_\sim, [d]_\sim\}| = 2$.

c) Seien $R, R' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zwei Ordnungsrelationen, so ist $R \cap R'$ ebenfalls eine Ordnungsrelation.

Antwort: Richtig.
Begründung: Beispielhaft für die Antisymmetrie. Seien $(a, b) \in R \cap R'$ und $(b, a) \in R \cap R'$, dann gilt $(a, b), (b, a) \in R$. Da R nach Voraussetzung antisymmetrisch folgt daraus $a = b$ (was zu zeigen war).

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Transitionssysteme)
Gegeben sei ein Stapel unterschiedlich großer Pfannkuchen, die der Größe nach sortiert werden sollen. Erlaubt ist es dabei nur, einen Oberteil des Stapels umzudrehen. Bei 6 Pfannkuchen, die wir der Größe nach mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnen und anfangs in der Ordnung 352416 auf dem Stapel liegen, würde das Umdrehen der ersten (obersten) 4 dem Übergang

$$352416 \xrightarrow{4} 425316$$

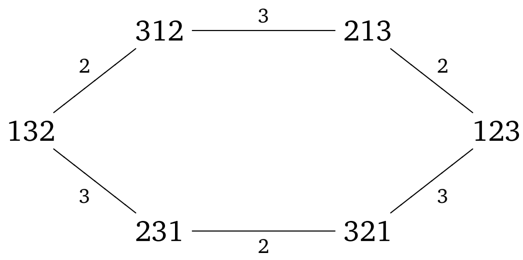
entsprechen.

(a) Zeichnen Sie für Stapel von 3 Pfannkuchen ein Diagramm mit allen möglichen Stapeln und den möglichen Übergängen (Wenden der ersten 2 oder 3) zwischen diesen.

(b) Betrachten Sie Stapel mit 4 Pfannkuchen. Geben Sie für $0 \leq k \leq 4$ die Menge aller Stapel an, die sich mit k Operationen zu 1234 sortieren lassen, aber nicht mit weniger als k Operationen. Welches ist der einzige Stapel, der sich auf zwei verschiedene Weisen in genau 3 Schritten sortieren lässt?

Lösungsskizze:

(a)



(b)

$$\begin{array}{rc}
0: & 1234 \\
1: & 2134, 3214, 4321 \\
2: & 3124, 4312, 2314, 4123, 3421, 2341 \\
3: & 1324, 4213, 3412, 1342, 4132, 1423, 2143, 2431, 1243, 3241, 1432 \\
4: & 4231, 2413, 3142
\end{array}$$

$$1324 \xrightarrow{2} 3124 \xrightarrow{3} 2134 \xrightarrow{2} 1234$$

$$1324 \xrightarrow{3} 2314 \xrightarrow{2} 3214 \xrightarrow{3} 1234$$

Aufgabe G2 (Mengenoperationen)
Sei M eine Menge und $A, B, C \subseteq M$ Teilmengen.

(a) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$.

ii. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

(b) Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche sind disjunkt?

$$A \setminus (B \cap C), \qquad A \cap (M \setminus B), \qquad M \setminus (A \cup B), \qquad (M \setminus A) \cup (M \setminus B).$$

Lösungsskizze:

(a) i. Wir zeigen, dass $(A \cap B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cap B$ und $(A \cap B) \setminus C \supseteq (A \setminus C) \cap B$.

($\subseteq$) Sei $x \in (A \cap B) \setminus C$. Dann ist $x \in A$, $x \in B$ und $x \notin C$. Also haben wir $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Daraus folgt, dass $x \in (A \setminus C) \cap B$.

($\supseteq$) Sei $x \in (A \setminus C) \cap B$. Dann ist $x \in A \setminus C$ und $x \in B$. Das erste bedeutet, dass $x \in A$ und $x \notin C$. Da $x \in A$ und $x \in B$, haben wir $x \in A \cap B$. Da also $x \notin C$, folgt $x \in (A \cap B) \setminus C$.

ii. Wir zeigen, dass $C \setminus (A \cap B) \subseteq (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ und $(C \setminus A) \cup (C \setminus B) \supseteq C \setminus (A \cap B)$.

($\subseteq$) Sei $x \in C \setminus (A \cap B)$. Dann ist $x \in C$ und $x \notin A \cap B$. Da $x \notin A \cap B$, muss entweder $x \notin A$ gelten, oder $x \notin B$ (wäre beides falsches, dann gilt $x \in A$ und $x \in B$ und damit $x \in A \cap B$). Falls $x \notin A$ gilt, dann $x \in C \setminus A$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Falls $x \notin B$ gilt, dann $x \in C \setminus B$ und damit $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. In beiden Fällen gilt also $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.

($\supseteq$) Sei $x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$. Dann gilt entweder $x \in C \setminus A$ oder $x \in C \setminus B$. Im ersten Fall gilt $x \in C$ und $x \notin A$. Letzteres bedeutet, dass $x \notin A \cap B$. Also gilt $x \in C \setminus (A \cap B)$. Im zweiten Fall beweist man analog, dass $x \in C \setminus (A \cap B)$.

(b) Es gilt, dass $A \cap (M \setminus B) \subseteq A \setminus (B \cap C)$, $M \setminus (A \cup B) \subseteq (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$. Weiterhin sind sowohl $M \setminus (A \cup B)$ und $A \setminus (B \cup C)$ als auch $M \setminus (A \cup B)$ und $A \cap (M \setminus B)$ disjunkt.

Aufgabe G3 (Relationen)
Sei R eine binäre Relation auf X, also $R \subseteq X \times X$. Wir definieren (induktiv)

$$\begin{aligned} R^0 &:= \{(x,x) : x \in X\}, \\ R^{n+1} &:= \{(x,y) : \text{ es gibt ein } z \text{ mit } (x,z) \in R \text{ und } (z,y) \in R^n \}, \\ R^* &:= \textstyle\bigcup_{n \geq 0} R^n. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) R^* ist eine reflexive Relation.

(b) R^* ist eine transitive Relation.

(c) R^* umfasst R, d.h. $R \subseteq R^*$.

(d) R^* ist die kleinste reflexive und transitive Relation, die R umfasst (d.h. falls R' reflexiv und transitiv ist mit $R \subseteq R'$, so gilt $R^* \subseteq R'$)

Lösungsskizze: Bemerken Sie dass:

$(x,y) \in R^n$ genau dann, wenn es eine Reihe $z_0, \ldots, z_n$ gibt mit $x = z_0, y = z_n$ so dass $z_0 R z_1 R z_2 R \ldots R z_n$.

(a) R^* is reflexiv, denn $R^0 \subseteq R^*$.

(b) Seien x, y, z mit xR^*y und yR^*z gegeben. Dann gibt es Zahlen i und j mit xR^iy und yR^jz. Dann gilt $xR^{i+j}z$ und damit xR^*z.

(c) R^* umfasst R, denn $R = R^1 \subseteq R^*$.

(d) Sei R' eine beliebige reflexive und transitive Relation, die R umfasst. Dann muss gelten: $R^0 \subseteq R'$, da R' reflexiv ist, und ferner $R = R^1 \subseteq R'$, da R' die Relation R umfasst. Da R' auch transitiv ist, folgt mit Induktion, dass $R^2, R^3, \ldots$ in R' enthalten sind. Also gilt $R^* \subseteq R'$. Damit ist gezeigt, dass R^* die *kleinste* solche Relation ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Boolsche Algebra) (6 Punkte)
Sei $| : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ die durch die folgende Wahrheitstafel definierte Boolesche Operation

$\vert$	0	1
0	1	1
1	1	0

(i) Drücken Sie die Bedeutung von $p \,|\, q$ umgangssprachlich aus.

(ii) Zeigen Sie, dass sich die üblichen Operationen $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ durch $|$ alleine definieren lassen. Extra: gibt es eine andere zweistellige Operation mit derselben Eigenschaft?

Lösungsskizze:

(i) $p\,|\,q$ bedeutet soviel wie: nicht p oder nicht q.

(ii) Anhand von $|$ bereits definierte Operatoren werden (und dürfen) zur Verkürzung der Terme wiederverwendet.

$$\begin{aligned} \neg p &= p\,|\,p \\ p \vee q &= (\neg p)\,|\,(\neg q) \end{aligned}$$

Alle anderen Operatoren lassen sich durch $\neg$ und $\vee$ definieren:

$$\begin{aligned} p \wedge q &= \neg(\neg p \vee \neg q) \\ p \rightarrow q &= \neg p \vee q \\ p \leftrightarrow q &= (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \end{aligned}$$

Extra: die zweistellige Operation † (weder ... noch) hat dieselbe Eigenschaft.

†	0	1
0	1	0
1	0	0

Aufgabe H2 (Induktion)

(i) Beweisen Sie durch Induktion:

Es gibt kein Wort $w \in \{a, b\}^*$ mit $aw = wb$.

(ii) Geben Sie einen Ein-Zeilen-Beweis für (i), der keine Induktion verwendet.

(iii) Die Menge der arithmetischen Ausdrücke sei wie folgt induktiv erklärt:

(a) jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ein Ausdruck,

(b) mit s und t sind auch $s \cdot t$ und $s + t$ Ausdrücke,

(c) mit s ist auch (s) ein Ausdruck.

Zeigen Sie durch strukturelle Induktion, dass jeder Ausdruck die gleiche Anzahl von linken und rechten Klammern enthält.

Lösungsskizze:

(i) Wir beweisen mit Induktion $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$, wobei

$P(n) =$ *„Es gibt kein Wort $w \in \{a, b\}^*$ der Länge n mit $aw = wb$."*

Induktionsanfang: das einzige Wort mit Lange 0 is das leere Wort ϵ, aber $a\epsilon = a \neq b = \epsilon b$. Damit ist $P(0)$ bewiesen.

Induktionsschritt: wir nehmen an $P(n)$ gilt, aber $P(n+1)$ nicht. Das heißt, es gibt ein Wort w der Länge $n+1$ mit $aw = wb$, abere keine Wörter der Länge n mit dieser Eigenschaft. Sei w ein Wort der Länge $n+1$ mit $aw = wb$. Dann muss w mit dem Buchstaben a anfangen, und deshalb hat w die Form $w = av$, wobei v ein Wort der Länge n ist. Es folgt, dass $aav = avb$ und $av = vb$. Also ist v ein Wort der Länge n mit $av = vb$. Widerspruch! Damit ist $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ bewiesen.

Es folgt $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$, d.h., es gibt keine Wörter $w \in \{a, b\}^*$ mit $aw = wb$.

(ii) Für jedes Wort w hat aw ein Buchstabe a mehr (und b weniger) als wb, und deshalb können sie unmöglich identisch sein.

(iii) Induktionsanfang: der Ausdruck n enthält weder linke noch rechte Klammern, und deshalb sind die beide Anzahlen davon gleich (nämlich 0).

Induktionsschritte: wir nehmen an s und t haben die gleiche Anzahl von linken und rechten Klammern (nämlich m and n). Dann haben auch $s \cdot t$ und $s + t$ die gleiche Anzahl von linken und rechten Klammern (nämlich $m + n$).

Wenn s die gleiche Anzahl von linken und rechten Klammern hat (z.B. n), dann hat (s) sowohl $n+1$ linke als auch rechte Klammern.