## FO Kompaktheit (Satz 4.1)

**Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz)**

**Version 1:** (Erfüllbarkeit)

Für $\Phi \subseteq \mathrm{FO}$ sind äquivalent:

($i$) $\Phi$ erfüllbar.

($ii$) Jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar.

**Version 2:** (Folgerungsbeziehung)

Für $\Phi \subseteq \mathrm{FO}, \varphi \in \mathrm{FO}$ sind äquivalent:

($i$) $\Phi \models \varphi$.

($ii$) $\Phi_0 \models \varphi$ für eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

Version 1 $\Leftrightarrow$ Version 2 (zur Übung!)
Version 1 für universell-pränexes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}$: Reduktion auf $\mathrm{AL}$





## FO Kompaktheit → Abschnitt 4

**Konsequenzen: die Stärken des Endlichkeitssatzes**
**die Schwächen von FO**

mit Kompaktheit findet man:

**beliebig große endliche Modelle ⇒ unendliche Modelle**

zu $\Phi$ betrachte $\Phi \cup \{\exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i = x_j : n \geqslant 1\}$

**unendliche Modelle ⇒ beliebig große unendliche Modelle**

zu $\Phi$ betrachte $\Phi \cup \{\neg c_i = c_j : i \neq j; i, j \in I\}$
für neue Konstanten $(c_i)_{i \in I}$

⇒ *keine* unendliche Struktur in $\mathrm{FO}$
bis auf Isomorphie charakterisierbar





## FO Kompaktheit

**Konsequenzen: die Stärken des Endlichkeitssatzes**
**die Schwächen von FO**

mit Kompaktheitsargumenten findet man:

**Nichtstandardmodelle**

von (unendlichen) Standardmodellen
in $\mathrm{FO}$ ununterscheidbare Strukturen

z.B. $\mathcal{N}^*$ zu $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$
Nichtstandardmodell der Arithmetik mit
'unendlich großen natürlichen Zahlen'

zur vollständigen $\mathrm{FO}$-Theorie von $\mathcal{N}$, $\Phi := \{\varphi \in \mathrm{FO} : \mathcal{N} \models \varphi\}$

betrachte $\Phi \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} < c : n \geqslant 2\}$ für neue Konstante $c$





## Sequenzenkalküle → Abschnitt 6.1

vgl. AL Sequenzenkalkül

Allgemeingültigkeitsbeweise (für bel. $\mathrm{FO}$-Formeln/Sätze)

Gegenstand: $\mathrm{FO}$-*Sequenzen* $\Gamma \vdash \Delta$
für endliche $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$

$\Gamma \vdash \Delta$ *allgemeingültig* wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$

Beweisziel: Ableitung allgemeingültiger Sequenzen

Ableitungsschritte: Anwendung von *Regeln*
(zur Erzeugung von Sequenzen)

**Korrektheit:** jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

**Vollständigkeit:** jede allgemeingültige Sequenz ist ableitbar.
(schwache Form, wird später verschärft)

## Sequenzenkalkül: Regeln und Korrektheit

Format von *Sequenzenregeln* (wie in AL): $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$

Konklusionen von Regeln ohne Prämissen: *Axiome*

*ableitbare Sequenzen*:
ausgehend von Axiomen (in endlich vielen Schritten) durch Anwendung von Sequenzenregeln erzeugte Sequenzen

$\boxed{\textit{Korrektheit}\text{: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig}}$

folgt aus der Korrektheit der einzelnen Regeln:

- die Axiome sind allgemeingültige Sequenzen;
- für Regeln mit Prämissen:
  Prämissen allgemeingültig $\Rightarrow$ Konklusion allgemeingültig.





## Sequenzenkalkül: Regeln

FO Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$, drei Gruppen von Regeln:

- *AL Regeln* (analog zum AL-Sequenzenkalkül).
- *Quantorenregeln*: Einführung von $\forall$ oder $\exists$ links/rechts.
  $(\forall\mathrm{L})$, $(\forall\mathrm{R})$, $(\exists\mathrm{L})$, $(\exists\mathrm{R})$.
- *Gleichheitsregeln*: Umgang mit Term-Gleichheiten.
  $(=)$, (Sub-L), (Sub-R).

$\boxed{\mathrm{AL} + \text{Quantorenregeln: vollständiger Beweiskalkül } \mathcal{SK}^{\neq} \text{ für } \mathrm{FO}^{\neq}}$

$\boxed{\mathcal{SK}^{\neq} + \text{Gleichheitsregeln: vollständiger Beweiskalkül } \mathcal{SK} \text{ für FO}}$

Zusätzlich (nicht notwendig aber natürlich) in $\mathcal{SK}^{+}$:

- *Schnittregeln*: Kettenschlüsse und Beweise durch Widerspruch.





## Sequenzenkalkül: Quantorenregeln

$$(\forall\mathrm{L})\quad \frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi(x) \vdash \Delta} \qquad\qquad (\forall\mathrm{R})\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(c/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi(x)}$$

falls $c$ nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

$$(\exists\mathrm{L})\quad \frac{\Gamma, \varphi(c/x) \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi(x) \vdash \Delta} \qquad\qquad (\exists\mathrm{R})\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi(x)}$$

falls $c$ nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$

Korrektheit prüfen!





## Sequenzenkalkül: Gleichheitsregeln

$$(=)\quad \frac{\Gamma, t = t \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

$$(\text{Sub-L})\quad \frac{\Gamma, \varphi(t/x) \vdash \Delta}{\Gamma, t = t', \varphi(t'/x) \vdash \Delta} \qquad (\text{Sub-R})\quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi(t/x)}{\Gamma, t = t' \vdash \Delta, \varphi(t'/x)}$$

und analoge Regeln mit $t' = t$ statt $t = t'$

Korrektheit prüfen!

## Sequenzenkalkül: Schnittregeln (optional)

| | |
|---|---|
| (modus ponens) | $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash \varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$ |
| (Kontradiktion) | $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \emptyset}$ |

Korrektheit prüfen!

Bem.: Kontradiktionsregel (lokal) mit modus ponens simulierbar

beide Regeln lassen sich (nicht lokal) eliminieren

(vgl. AL-Sequenzenkalkül)

unterscheide *schnittfreie* Kalküle wie $\mathcal{SK}$
von solchen mit Schnittregeln wir $\mathcal{SK}^+$





## Ziel: Vollständigkeit $\longrightarrow$ Abschnitt 6.3

**Definitionen:**

*Ableitbarkeit aus Theorie* $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0$:

$\varphi$ **ableitbar aus** $\boldsymbol{\Phi}$ $[\Phi \vdash \varphi]$ gdw.

für geeignetes $\Gamma_0 \subseteq \Phi$ (Voraussetzungen) ist $\Gamma_0 \vdash \varphi$ ableitbar.

$\boldsymbol{\Phi}$ **konsistent** (widerspruchsfrei) gdw. *nicht* $\Phi \vdash \emptyset$.

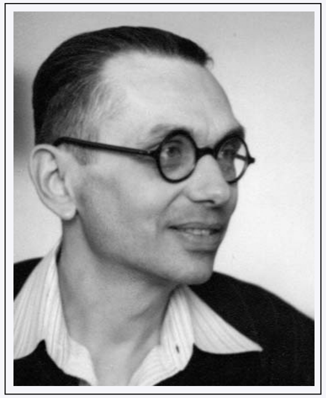
**Vollständigkeit** (starke Form) ... **Korrektheit**

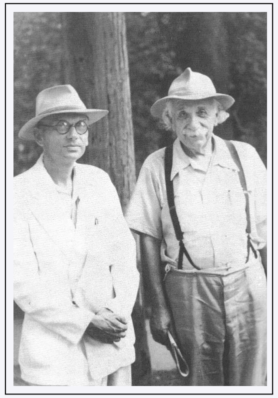
| Vollständigkeit | Korrektheit |
|---|---|
| $\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$ | $\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \models \varphi$ |
| $\Phi$ konsistent $\Rightarrow$ $\Phi$ erfüllbar | $\Phi$ erfüllbar $\Rightarrow$ $\Phi$ konsistent |
| alles, was wahr ist, ist ableitbar | alles, was ableitbar ist, ist wahr |





## Kurt Gödel (1906–1978)





mit Albert Einstein

*der* Logiker des 20. Jahrhunderts





## Gödelscher Vollständigkeitssatz (Satz 6.7)

**(Vollständigkeit & Korrektheit des Sequenzenkalküls)**

Für jede Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0(S)$
und jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}_0(S)$ gelten:

- $\Phi \models \varphi$ gdw. $\Phi \vdash \varphi$.
- $\Phi$ erfüllbar gdw. $\Phi$ konsistent.

**Zentrale Folgerungen**

**Kompaktheitssatz** (wesentlich neuer Zugang)

**Allgemeingültigkeit rekursiv aufzählbar**
(später: nicht entscheidbar)

## Vollständigkeitsbeweise

→ Abschnitt 6.3

zu zeigen: Konsistenz $\Rightarrow$ Erfüllbarkeit

$\left.\begin{array}{r}\text{nicht-Ableitbarkeit}\\ \text{best. Sequenzen}\end{array}\right\} \Rightarrow$ Existenz eines Modells

dazu

**Ableitbarkeit von Sequenzen aus einer Satzmenge**

Ableitbarkeit unter gegebenen Voraussetzungen:

$\Gamma \vdash \Delta$ *ableitbar aus* $\Phi$ gdw. für geeignetes $\Gamma_0 \subseteq \Phi$
$\Gamma_0, \Gamma \vdash \Delta$ ableitbar ist.

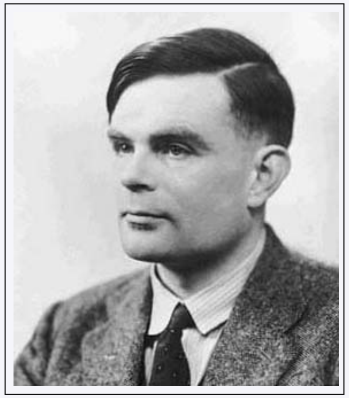




## Unentscheidbarkeit

Church–Turing

Church (1903–1995)



Turing (1912–1954)





## Unentscheidbarkeit von SAT(FO)

→ Abschnitt 7.1

**Satz von Church und Turing**
$\mathrm{SAT(FO)}$ ist unentscheidbar.
genauer: nicht rekursiv aufzählbar.

*Beweis: Reduktion des Halteproblems*

FO ausreichend ausdrucksstark für Kodierung des Verhaltens von TM (in einzelnen Sätzen)

Finde berechenbare Zuordnung

$$\mathcal{M}, w \longmapsto \varphi_{\mathcal{M},w} \in \mathrm{FO}_0(S_{\mathcal{M}}),$$

$$\boxed{\varphi_{\mathcal{M},w} \text{ erfüllbar gdw. } w \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty}$$

Idee: $\varphi_{\mathcal{M},w}$ besagt, dass die Konfigurationenfolge in der Berechnung von $\mathcal{M}$ auf $w$ nicht abbricht.





## Reduktion des Halteproblems auf SAT(FO)

einfache Variante

zu $\mathcal{M} = (\Sigma, Q, q_0, \delta, q^+, q^-)$
wähle als Signatur $S_{\mathcal{M}}$:

| | | |
|---|---|---|
| succ | Nachfolgerfunktion, 1-st. | (Schritt-/Positionszähler) |
| 0 | Konstante | |
| $R_a$ | 2-st. Relation für $a \in \Sigma \cup \{\Box\} =: \Gamma$ | (Bandbeschriftung) |
| $Z_q$ | 1-st. Relation für $q \in Q$ | (Zustände) |
| $K$ | 2-st. Relation | (Kopfpositionen) |

intendierte Interpretation über $\mathbb{Z}$:

$(t,i) \in R_a$ : zum Zeitpunkt $\#t$ steht in Zelle $\#i$ das Symbol $a$.
$t \in Z_q$ : zum Zeitpunkt $\#t$ ist $\mathcal{M}$ im Zustand $q$.
$(t,i) \in K$ : zum Zeitpunkt $\#t$ steht der Kopf auf Zelle $\#i$.