
Germany's Next
Top-Logiker
1. Vorrunde
Meine Damen und Herren! Ihre Zeit ist um.
Ist Ihre Antwort auf diese Frage inkorrekt?
☐ Ja
☐ Nein
Oh Sch… !
KITTIHAWK / KA.GREVE

FO: Axiome und Theorie

(de-)motivierendes Beispiel: $S=(+,0)$

- Strukturen $(\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^*,\circ,\varepsilon)$ oder $(\{0,1\},\mathrm{xor},0)$
- Strukturen $(\mathcal{P}(X),\cup,\varnothing)$ oder $(\mathbb{N},\max,42)$

Interessieren uns für alle S-Strukturen mit

i) $\forall a\forall b\forall x\ \ a+x=b+x \rightarrow a=b$

ii) $\forall a\forall b\forall c\ \ (a+b)+c=a+(b+c)$

iii) $\forall x\ \ x+0=x=0+x$

Definition: Eine Theorie T ist eine Signatur S zusammen mit einer Menge A von S-Formeln, genannt Axiome.

$\boxed{a+x=b+x \ \Rightarrow a=b\ ?}$

Ein Modell von T ist eine S-Struktur M mit $M \Vdash A$

FO: Axiome und Theorie

(Bsp-)**Theorem:** Sei *T* die Theorie mit Signatur (+,0) und Axiomen i) bis iii).

Dann gilt in *T*: $\forall x\,(x+a=x \rightarrow a=0)$

Interessieren uns für alle *S*-Strukturen mit

i) $\forall a \forall b \forall x \;\; a+x=b+x \rightarrow a=b$

ii) $\forall a \forall b \forall c \;\; (a+b)+c=a+(b+c)$

iii) $\forall x \;\; x+0=x=0+x$

Definition: Eine Theorie *T* ist eine Signatur *S* zusammen mit einer Menge *A* von *S*-Formeln, genannt Axiome.

Ein Modell von *T* ist eine *S*-Struktur *M* mit $M \Vdash A$

Alfred Tarski (1901–1983)

Logiker, der die semantische Sicht auf FO wesentlich geprägt hat

Semantik von FO(S) → Abschnitt 2.2

Wahrheitswerte $\varphi^{\mathfrak{I}}$ für $\mathrm{FO}(S)$-Formeln über S-Interpretation $\mathfrak{I}$

induktive Definition von $\varphi^{\mathfrak{I}}$

atomare φ:	$(t_1 = t_2)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $t_1^{\mathfrak{I}} = t_2^{\mathfrak{I}}$. $(Rt_1 \dots t_n)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $(t_1^{\mathfrak{I}}, \dots, t_n^{\mathfrak{I}}) \in R^{\mathcal{A}}$.
Negation:	$(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} := 1 - \varphi^{\mathfrak{I}}$.
Konjunktion:	$(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{I}} := \min(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$.
Disjunktion:	$(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} := \max(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$.
Quantoren:	$(\exists x\varphi)^{\mathfrak{I}} = \max\big(\varphi^{\mathfrak{I}[x\mapsto a]} \colon a \in A\big)$. $(\forall x\varphi)^{\mathfrak{I}} = \min\big(\varphi^{\mathfrak{I}[x\mapsto a]} \colon a \in A\big)$.

Semantik der Quantoren arbeitet mit *modifizierten Belegungen*

$$\beta[x \mapsto a](y) := \begin{cases} \beta(y) & \text{für } y \in \mathcal{V} \setminus \{x\} \\ a & \text{für } y = x \end{cases}$$

$$\mathfrak{I}[x \mapsto a] = (\mathcal{A}, \beta[x \mapsto a])$$

Semantik von FO(S)

Wahrheitswert $\varphi^{\mathfrak{I}} \in \mathbb{B}$ definiert für alle $\varphi \in \mathrm{FO}(S)$ und S-Interpretationen $\mathfrak{I} = (\mathcal{A}, \beta)$

Sprech- und Schreibweisen:

für $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$:
- φ *wahr* unter $\mathfrak{I}$
- $\mathfrak{I}$ erfüllt φ
- $\mathfrak{I}$ Modell von φ
- $\mathfrak{I} \models \varphi$

für $\varphi^{\mathfrak{I}} = 0$:
- φ *falsch* unter $\mathfrak{I}$
- $\mathfrak{I}$ erfüllt φ nicht
- $\mathfrak{I}$ kein Modell von φ
- $\mathfrak{I} \not\models \varphi$

Belegungen und freie Variablen

Werte der Belegung $\beta(x) \in A$ über $\mathcal{A}$ nur relevant für $x \in \mathrm{frei}(\varphi)$.

Beweis durch Induktion über $\varphi \in \mathrm{FO}(S)$!

Für $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{FO}_n(S)$ (d.h. $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$), $(a_1, \dots, a_n) = (\beta(x_1), \dots, \beta(x_n)) \in A^n$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{:gdw.} \quad \left[\begin{array}{l} (\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \text{ für ein/alle } \beta \text{ mit} \\ \beta(x_i) = a_i \text{ für } i = 1, \dots n \end{array}\right].$$

Beispiel: $\varphi(x) = \forall y Rxy$ beschreibt eine Eigenschaft von x,
$\varphi^{\mathfrak{I}}$ hängt nicht von $\beta(y)$ ab, aber von $\beta(x)$

speziell für **Sätze** φ (d.h. mit $\mathrm{frei}(\varphi) = \emptyset$):
$\varphi^{\mathfrak{I}}$ hängt nur von $\mathcal{A}$ ab; entweder $\mathcal{A} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$,
*un*abhängig von β

semantische Grundegriffe → Abschnitt 2.3

übertragen sich direkt von AL auf FO!

Folgerungsbeziehung, $\varphi \models \psi$: f.a. $\mathfrak{I}$ gilt $(\mathfrak{I} \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{I} \models \psi)$.

logische Äquivalenz, $\varphi \equiv \psi$: f.a. $\mathfrak{I}$ gilt $(\mathfrak{I} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \psi)$.
vgl. *Erfüllbarkeitsäquivalenz* (später)

Erfüllbarkeit, $\varphi \in \mathrm{SAT}(\mathrm{FO})$: es gibt $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Allgemeingültigkeit: für alle $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Äquivalent?
- $\forall x \forall y \varphi(x,y) \equiv \forall y \forall x \varphi(x,y)$?
- $\forall x \varphi \equiv \neg\exists x \neg\varphi$?

Erfüllbar?
- $\forall x \exists y Rxy \wedge \neg\exists y \forall x Rxy$?
- $\forall x \forall y (Rxy \wedge \neg Ryx)$?
- $\forall x \forall y (Rxy \leftrightarrow \neg Ryx)$?

Variationen: relationale Semantik → Abschnitt 2.4

mit $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{FO}_n(S)$ und S-Struktur $\mathcal{A}$
assoziiere die n-stellige Relation

$$\boxed{[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}} := \{\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n) \in A^n : \mathcal{A} \models \varphi[\mathbf{a}]\} \subseteq A^n}$$

$\longrightarrow$ relationale Algebra

Korrespondenzen:

Konjunktion $\wedge$	—	Durchschnitt $\cap$
Disjunktion $\vee$	—	Vereinigung $\cup$
Negation $\neg$	—	Komplement
existenzielle Quant. $\exists$	—	Projektion

$\longrightarrow$ relationale Datenbanken, SQL

Variationen: Spielsemantik → Abschnitt 2.4

model checking Spiel für φ in Negations-Normalform (NNF)

NNF: alle Negationen nach innen;
Aufbau mit nur $\forall, \exists, \wedge, \vee$ (ohne $\neg$)
aus Atomen und negierten Atomen

allgemeiner Ansatz:

zu geg. $\mathfrak{I}$ und φ Spiel zwischen zwei Spielern

$$\begin{cases} \text{Verifizierer } \mathbf{V} & \text{will } \mathfrak{I} \models \varphi \textit{ nachweisen} \\ \text{Falsifizierer } \mathbf{F} & \text{will } \mathfrak{I} \models \varphi \textit{ widerlegen} \end{cases}$$

Spiel-Positionen: $(\psi, \mathbf{a}) \in \mathrm{SF}(\varphi) \times A^n$

Spiel-Züge/Regeln so gemacht, dass

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{V}\\ \mathbf{F}\end{array}\right\} \text{ Gewinnstrategie in Position } (\psi, \mathbf{a}) \text{ hat, gdw. } \left\{\begin{array}{l}\mathcal{A} \models \psi[\mathbf{a}]\\ \mathcal{A} \not\models \psi[\mathbf{a}]\end{array}\right.$$

Spielsemantik – Semantik-Spiel

zu $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{FO}_n(S)$ über $\mathcal{A}$ in NNF

mit Spielpositionen $(\psi, \mathbf{a}) \in \mathrm{SF}(\varphi) \times A^n$

Züge in Position $(\psi, \mathbf{a})$, $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$:

$\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$	**F** am Zug zieht nach $(\psi_1, \mathbf{a})$ oder nach $(\psi_2, \mathbf{a})$.
$\psi = \psi_1 \vee \psi_2$	**V** am Zug zieht nach $(\psi_1, \mathbf{a})$ oder nach $(\psi_2, \mathbf{a})$.
$\psi = \forall x_i \psi_0$	**F** am Zug zieht nach einem $(\psi_0, \mathbf{a}[x_i \mapsto a_i'])$.
$\psi = \exists x_i \psi_0$	**V** am Zug zieht nach einem $(\psi_0, \mathbf{a}[x_i \mapsto a_i'])$.

Spiel-Ende in Positionen $(\psi, \mathbf{a})$, ψ atomar oder negiert atomar.

Gewinner: **V** gewinnt in Endposition $(\psi, \mathbf{a})$, wenn $\mathcal{A} \models \psi[\mathbf{a}]$.
F gewinnt in Endposition $(\psi, \mathbf{a})$, wenn $\mathcal{A} \not\models \psi[\mathbf{a}]$.

Spielsemantik – Semantik-Spiel

Satz:

$\mathcal{A} \models \psi[\mathbf{a}] \;\Leftrightarrow\;$ **V** hat Gewinnstrategie in Position $(\psi, \mathbf{a})$.

reduziert Auswertung auf Spielanalyse
oft mit algorithmisch optimaler Komplexität

Frage: Spiel für φ, das nicht in NNF ist?

das Konzept der Gleichung in der Algebra Robert Recorde

Arzt und früher Popularisierer der “Algebra”

der Erfinder des Gleichheitszeichens!

FO mit oder ohne = ? → Abschnitt 2.5

FO und $\mathrm{FO}^{\neq}$

- Gleichheit ist Bestandteil der *Logik* in FO;
  anders als interpretierte Relationen $R \in S$.
- natürliche Formalisierungen brauchen oft $=$,
  z.B.: Injektivität, algebraische Identitäten, ...
- dennoch möglich: Reduktion von FO auf $\mathrm{FO}^{\neq}$;
  Idee: modelliere $=$ durch interpretierte Relation $\sim$.

$\hat{S} := S \cup \{\sim\}$

Verträglichkeitsbedingungen:
$\sim$ Kongruenzrelation bzgl. aller $R, f \in S$

erhalte Modelle $\mathcal{A}_0$ mit echter Gleichheit als $\sim$-Quotientien:

$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}/\!\sim^{\mathcal{A}} = \big(A/\!\sim^{\mathcal{A}}, \dots, [c^{\mathcal{A}}]_{\sim^{\mathcal{A}}}, \dots, f^{\mathcal{A}}/\!\sim^{\mathcal{A}}, \dots, R^{\mathcal{A}}/\!\sim^{\mathcal{A}}\big)$
$\sim$-Äquivalenzklassen als Elemente

Pränexe Normalform → Abschnitt 3.1

$\varphi \in \mathrm{FO}(S)$ in *pränexer Normalform* (PNF):

$$\boxed{\begin{array}{l}\varphi = Q_1 x_{i_1} \dots Q_k x_{i_k} \psi, \\ Q_i \in \{\forall, \exists\},\ k \in \mathbb{N},\ \psi \text{ quantorenfrei.}\end{array}}$$

Beispiele

$$\exists y (Exy \wedge \forall x(Eyx \rightarrow x = y)) \;\equiv\; \exists y \forall z \big(Exy \wedge (Eyz \rightarrow z = y)\big)$$
$$\exists y \forall x Exy \vee \neg \exists y Exy \;\equiv\; \exists y_1 \forall y_2 \forall y_3 \big(Ey_2 y_1 \vee \neg Exy_3\big)$$

Satz über PNF

Jede FO-Formel ist logisch äquivalent zu einer Formel in PNF.

Beweis durch Induktion über $\varphi \in \mathrm{FO}(S)$.

Substitution → Abschnitt 3.2

das semantisch korrekte Einsetzen von Termen

gesucht: für $t \in T(S)$ und $\varphi(x) \in \mathrm{FO}(S)$,
$\varphi' := \varphi(t/x) \in \mathrm{FO}(S)$ so, dass:

$$\boxed{\mathfrak{I} \models \varphi' \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{I}[x \mapsto t^{\mathfrak{I}}] \models \varphi.}$$

Vorsicht! Naives Ersetzen von x durch t tut's nicht!

- beachte, dass x frei und gebunden auftreten kann.
- beachte, dass Variablen in t nicht fälschlich gebunden werden.

Methode
Induktive Definition, die intern gebundene Variablen so umbenennt, dass Konflikte vermieden werden.

Beispiel: $\varphi(x) = \forall y\big(Exy \wedge \exists x \neg Exy\big)$

$\varphi(fy/x) = ?$

Thoralf Skolem (1887–1963)

Logik, Modelltheorie, Mengenlehre

Skolemisierung: alles universell ? → Abschnitt 3.3

universell-pränexe Formeln: $\forall x_{i_1} \dots \forall x_{i_k}\, \psi$, ψ quantorenfrei

- nicht jede Formel ist logisch äquivalent zu universell-pränexer Formel, z.B. $\varphi = \forall x \exists y\, Exy$
- aber jede Formel ist *erfüllbarkeitsäquivalent* zu universell-pränexer Formel.

Idee: neue Funktionen, die *ggf.* Existenzbeispiele liefern
[vgl. $\exists$-Züge für **V** im Semantik Spiel]

Beispiel

$\varphi = \forall x \exists y\, Exy \quad \longmapsto \quad \varphi' = \forall x\, Exfx \qquad$ (für *neues* f)

dann gilt:

(i) $\mathcal{A}' = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}'}) \models \varphi' \;\Rightarrow\; \mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots) \models \varphi$

(ii) $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots) \models \varphi \;\Rightarrow\;$ es gibt $f^{\mathcal{A}}$ über A, sodass
$\mathcal{A}' = (A, E^{\mathcal{A}}, \dots, f^{\mathcal{A}'}) \models \varphi'$

Skolemnormalform (Satz 3.6)

Satz über die Skolemnormalform

Jedes $\varphi \in \mathrm{FO}$ ist *erfüllbarkeitsäquivalent* zu einer universell-pränexen Formel φ' (in einer erweiterten Signatur).

Man erhält φ' aus einer zu φ logisch äquivalenten Formel in PNF durch Substitution von *Skolemfunktions*termen für existentiell abquantifizierte Variablen.

Zur Erfüllbarkeitsäquivalenz gilt sogar:

- $\varphi' \models \varphi$.
- jedes Modell von φ lässt sich zu Modell von φ' erweitern.

Jacques Herbrand (1908–1931)

Logiker und Algebraiker

Satz von Herbrand → Abschnitt 3.4

zur Erfüllbarkeit von universellen $\mathrm{FO}^{\neq}$-Sätzen in Herbrand-Modellen

- S enthalte mindestens ein Konstantensymbol
- geg. $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S)$: Satzmenge, *universell & gleichheitsfrei*

Herbrand-Struktur (Erinnerung):
die S_{F}-Termstruktur $\mathcal{T}_0(S)$ über $T_0(S)$ (variablenfreie S-Terme)

Herbrand-Modell:
Expansion der Termstruktur $\mathcal{T}_0(S)$ zu S-Struktur,
— durch Interpretation von R (n-st.) als Teilmenge von $T_0(S)^n$ —
zu einem Modell von Φ

Gleichheitsfreiheit notwendig!

Satz von Herbrand (Satz 3.10)

Satz von Herbrand

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S)$ Menge von *universellen, gleichheitsfreien* Sätzen;
S habe mindestens ein Konstantensymbol.

Dann gilt: $\boxed{\Phi \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow \text{es existiert ein Herbrand-Modell } \mathcal{H} = (\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R \in S}) \models \Phi.}$

Beweis

"$\Leftarrow$": offensichtlich.
"$\Rightarrow$": geeignete Interpretationen $R^{\mathcal{H}}$ aus geg. Modell $\mathcal{A} \models \Phi$.

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL → Abschnitt 3.5

Reduktions-Idee: $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(S)$ (bel. Formelmenge)

erf.-äquiv.

$\Phi' \subseteq \mathrm{FO}_0(S_1)$ (Satzmenge)

erf.-äquiv.

$\Phi'' \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S_2)$ (gleichheitsfrei)

erf.-äquiv.

$\Phi''' \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S_3)$ (universell(-pränex))

$\boxed{\Phi \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow \Phi''' \text{ erfüllbar} \Leftrightarrow \Phi''' \text{ in Herbrand-Modell erfüllbar}}$

und Bedingungen an Herbrand-Modell lassen sich in AL kodieren!