Vollständige Systeme von Junktoren → Abschnitt 3.3

Für $n \geqslant 1$ ist jede Funktion in $\mathcal{B}_n$ darstellbar durch AL_n-Formel, die nur die Junktoren $\neg$ und $\wedge$ (nur $\neg$ und $\vee$) benutzt.

Begr.: Eliminiere $\vee$ oder $\wedge$ mit $\begin{cases} \varphi_1 \vee \varphi_2 \equiv \neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) \\ \varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2) \end{cases}$

Systeme von Junktoren (Booleschen Funktionen) mit dieser Eigenschaft heißen *vollständig*.

weitere Beispiele vollständiger Systeme:

- $|$ mit der Definition $p \mid q := \neg(p \wedge q)$ (NAND)
  benutze z.B.: $\neg p \equiv p \mid p$; $p \wedge q \equiv \neg(p \mid q) \equiv (p \mid q) \big| (p \mid q)$.
- $\rightarrow$ zusammen mit 0
  benutze z.B.: $\neg p \equiv p \rightarrow 0$; $p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q \equiv (p \rightarrow 0) \rightarrow q$.

nicht vollständig sind z.B. $\begin{cases} \{\wedge, \vee\} & \text{(Monotonie);} \\ \{\rightarrow\} & (0 \in \mathcal{B}_n \text{ nicht darstellbar).} \end{cases}$

Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz) (Satz 4.1)

Erfüllbarkeit von unendlichen Formelmengen hängt nur von je endlich vielen ab, i.d.S.d.

für alle $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ gilt:

$$\boxed{\mathbf{\Phi} \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \text{jedes endliche } \mathbf{\Phi_0} \subseteq \mathbf{\Phi} \text{ erfüllbar}} \quad (*)$$

für alle $\Phi \subseteq \mathrm{AL}, \psi \in \mathrm{AL}$ gilt:

$$\boxed{\mathbf{\Phi} \models \psi \quad \text{gdw.} \quad \mathbf{\Phi_0} \models \psi \text{ für ein endliches } \mathbf{\Phi_0} \subseteq \mathbf{\Phi}} \quad (**)$$

Konsequenz:
Unerfüllbarkeit einer unendlichen Formelmenge lässt sich durch ein endliches Zertifikat nachweisen. (Warum?)

Bemerkung: Aussagen $(*)$ und $(**)$ sind äquivalent.

Kompaktheitssatz: Beweis → Abschnitt 4

für $\Phi \subseteq \mathrm{AL}(\mathcal{V})$, $\mathcal{V} = \{p_i : i \geqslant 1\}$

Sei jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar.

Konstruiere induktiv $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \ldots$ so, dass für jedes n:

- $\mathfrak{I}_n$ eine $\mathcal{V}_n$-Interpretation ist.
- $\mathfrak{I}_{n+1}$ verträglich ist mit $\mathfrak{I}_n$: $\mathfrak{I}_{n+1}(p_i) = \mathfrak{I}_n(p_i)$ für $1 \leqslant i \leqslant n$.
- Für jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$
  gibt es ein erfüllendes $\mathfrak{I}$,
  das mit $\mathfrak{I}_n$ verträglich ist.

Dann ist $\mathfrak{I} \models \Phi$ für die Interpretation $\begin{cases} \mathfrak{I} \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{B} \\ \quad p_n \longmapsto \mathfrak{I}_n(p_n) \end{cases}$

Frage: Wie kommt man von $\mathfrak{I}_n$ zu $\mathfrak{I}_{n+1}$?

Kompaktheitssatz: Konsequenzen

vgl. auch Skript u. Aufgaben

Lemma von König (Lemma 4.4)

Ein endlich verzweigter Baum mit unendlich vielen Knoten muss einen unendlichen Pfad haben. beachte Voraussetzung!

k-Färbbarkeit

Ein Graph ist genau dann k-färbbar, wenn jeder endliche Teilgraph k-färbbar ist.

Domino-Parkettierungen

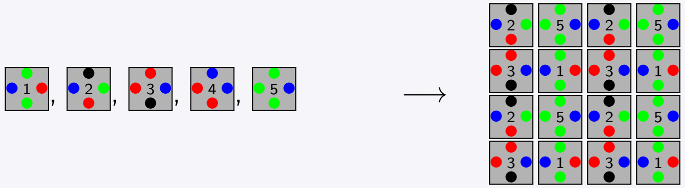
Ein endliches Domino-System erlaubt genau dann eine Parkettierung der Ebene, wenn sich beliebig große endliche Quadrate parkettieren lassen.

Domino-Parkettierung

ein interessantes, algorithmisch unentscheidbares Problem

> Zu gegebener Menge von Kacheln mit gefärbten Rändern:
> Kann man damit beliebig große Quadrate kacheln?

Beispiel:



Mit AL-Kompaktheit lässt sich zeigen:

Ein endlicher Kachel-Satz erlaubt genau dann eine Parkettierung der unendlichen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$-Ebene (oder auch der $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-Ebene), wenn sich beliebig große endliche Quadrate parkettieren lassen. (wie?)

Lemma von König aus AL-Kompaktheit

Betrachte $\mathcal{T} = (V, E, \lambda)$ Baum mit

- Wurzel λ und abzählbar unendlicher Knotenmenge V,
- endlich verzweigter Kantenrelation E:
  $E[u] = \{v \in V : (u, v) \in E\}$ endlich f.a. $u \in V$.
- Pfaden $\lambda \xrightarrow{E} \dots \xrightarrow{E} u$ jeder endlichen Länge,
  da sonst V endlich.

Kodierung in $\mathrm{AL}(\mathcal{V})$ mit $\mathcal{V} := \{p_u : u \in V\}$:

$$\varphi_u := p_u \to \bigvee\{p_v : v \in E[u]\}$$

"wenn u gewählt wird,
dann auch mindestens ein direkter Nachfolger von u"

Lemma von König aus AL-Kompaktheit

Kodierung in $\mathrm{AL}(\mathcal{V})$ mit $\mathcal{V} := \{p_u : u \in V\}$:

$$\varphi_u := p_u \to \bigvee\{p_v : v \in E[u]\}$$

"wenn u gewählt wird,
dann auch mindestens ein direkter Nachfolger von u"

Für $\Phi := \{p_\lambda\} \cup \{\varphi_u : u \in V\}$ gilt:

- jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar, also auch Φ insgesamt.
- wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, so existiert ein unendlicher Pfad
  $\lambda = u_0 \xrightarrow{E} u_1 \xrightarrow{E} u_2 \xrightarrow{E} \dots$ mit $\mathfrak{I}(u_i) = 1$.

Bem.: mit $\varphi'_u := p_u \to$ "...genau ein direkter Nachfolger von u"
beschreibt jedes $\mathfrak{I} \models \Phi'$ *exakt einen* unendlichen Pfad.

Logikkalküle: Deduktion und Refutation

> *Logikkalküle*: rein syntaktische Formate für formale Beweise.
>
> *Formale Beweise*: syntaktische Zeichenketten,
> nach einfach nachprüfbaren syntaktischen Regeln aufgebaut
> (Regelsystem: *Kalkül*).
>
> *Ableitung*: Erzeugung von (regelkonformen) formalen Beweisen.
>
> **Korrektheit** nur semantisch korrekte Sachverhalte sind formal beweisbar (ableitbar).
>
> **Vollständigkeit** jeder semantisch korrekte Sachverhalt ist formal beweisbar (ableitbar).

Resolution: ein *Widerlegungskalkül* für die *Unerfüllbarkeit* von KNF-Formeln.

Sequenzenkalkül: ein *Deduktionskalkül* für *Allgemeingültigkeit* beliebiger AL-Formeln.

KNF in Klauselform → Abschnitt 5.1

KNF: Konjunktionen von Disjunktionen von Literalen.

Notation: L für Literal; $\overline{L}$ für komplementäres Literal; $\overline{L} \equiv \neg L$.

Klausel: endliche Menge von Literalen

$C = \{L_1, \dots, L_k\}$ steht für $\bigvee C \equiv L_1 \vee \dots \vee L_k$

$\Box$ steht für die leere Klausel.

Erinnerung: $\Box \equiv \bigvee \emptyset \equiv 0$.

Klauselmenge: Menge von Klauseln

$K = \{C_1, \dots, C_\ell\}$ steht für $\bigwedge K \equiv C_1 \wedge \dots \wedge C_\ell$

Erinnerung: $\bigwedge \emptyset \equiv 1$.

$\boxed{\text{endliche Klauselmengen} \approx \text{KNF-Formeln}}$

Resolutionskalkül arbeitet mit KNF in Klauselform

Ableitungsziel: Nachweis der Unerfüllbarkeit einer geg. Klauselmenge durch Ableitung der leeren Klausel $\Box$

Resolution → Abschnitt 5.2

$C = \{L_1, \dots, L_k\}$ steht für $\bigvee C \equiv L_1 \vee \dots \vee L_k$, $\qquad \Box \equiv \bigvee \emptyset \equiv 0$.

$K = \{C_1, \dots, C_\ell\}$ steht für $\bigwedge K \equiv C_1 \wedge \dots \wedge C_\ell$

Beispiele: $L, \overline{L} \in C \;\Rightarrow\; C \equiv 1$ allgemeingültig.

$C \equiv 1 \;\Rightarrow\; K \equiv K \setminus \{C\}$.

$\Box \in K \;\Rightarrow\; K \equiv 0$ (unerfüllbar).

$K \models C \;\Leftrightarrow\; K \equiv K \cup \{C\}$.

Resolventen und Resolutionslemma

$$L \in C_1, \overline{L} \in C_2 \;\Rightarrow\; \{C_1, C_2\} \models \underbrace{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{L}\})}_{\textit{Resolvente}} =: C$$

Beispiele: $y \in C_1,\ y \in C_2 \;\rightsquigarrow\; y \in C$

$y \in C_1,\ \neg y \in C_2 \;\rightsquigarrow\; y, \neg y \in C$ Tautologie

Resolution

diagrammatisch:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] C_1 = \{\dots, L\} \arrow[dr] & & C_2 = \{\dots, \overline{L}\} \arrow[dl] \\ & C = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{L}\}) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \{p, \underline{\neg q}, r\} \arrow[dr] & & \{p, \underline{q}, s, t\} \arrow[dl] \\ & \{p, r, s, t\} & \end{tikzcd}$$

Resolutionslemma (Lemma 5.5)

Seien $C_1, C_2 \in K$, C Resolvente von C_1 und C_2.
Dann ist $K \equiv K \cup \{C\}$. [also $K \models C$]

Res(K) und Res*(K)

$\mathrm{Res}(K) := K \cup \{C\colon\ C$ Resolvente von Klauseln in $K\}$.

Klausel C heißt (im Resolutionskalkül) *ableitbar* aus K,
gdw. $\quad C \in \underbrace{\mathrm{Res} \cdots \mathrm{Res}}_{n\text{-mal}}(K)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

$\mathrm{Res}^*(K)$: die Menge aller aus K ableitbaren Klauseln.

Korrektheit / Vollständigkeit

Korrektheit: $\Box \in \mathrm{Res}^*(K) \;\Rightarrow\; K \equiv 0$ (unerfüllbar). [R-Lemma]

Vollständigkeit: K unerfüllbar $\;\Rightarrow\; \Box \in \mathrm{Res}^*(K)$.

Resolutionskalkül: Vollständigkeit → Abschnitt 5.3

z.z.: K über $\mathcal{V}_n = \{p_1, \dots, p_n\}$ unerfüllbar $\Rightarrow$ $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$.

Beweis durch Induktion über n.

Induktionsschritt von n nach n + 1

Aus $K = \{C_1, \dots, C_k\}$ über $\mathcal{V}_{n+1}$ gewinne K_0 und K_1 über $\mathcal{V}_n$ mit

$K_0 \equiv K \cup \{\{\neg p_{n+1}\}\}$ und $K_1 \equiv K \cup \{\{p_{n+1}\}\}$ (wie?)

K unerfüllbar $\Rightarrow$ K_0 und K_1 unerfüllbar
$\Rightarrow$ $\Box \in \mathrm{Res}^*(K_0)$ und $\Box \in \mathrm{Res}^*(K_1)$.

Dann ist $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$ oder $\begin{cases} \{p_{n+1}\} \in \mathrm{Res}^*(K) \\ \text{und} \\ \{\neg p_{n+1}\} \in \mathrm{Res}^*(K) \end{cases}$

und demnach jedenfalls $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$.

Resolutionsalgorithmus

breadth-first-search, Breitensuche

Eingabe: K	[Klauselmenge, endlich]
$R := K$ WHILE $(\mathrm{Res}(R) \neq R$ and $\Box \notin R)$ DO $R := \mathrm{Res}(R)$ OD IF $\Box \in R$ THEN output "unerfüllbar" ELSE output "erfüllbar"	

Beweis im Resolutionskalkül

Ableitungsbaum für $\Box$:
- Knoten mit Klauseln beschriftet
- $\Box$ an der Wurzel
- Resolventen an binären Verzweigungen
- Klauseln aus K an den Blättern

Hornklauseln → Abschnitt 5.4

- interessanter Spezialfall für KI Anwendungen,
- AL-HORN-SAT-Problem effizient entscheidbar
- logische Programmierung (Prolog: FO Horn-Formeln)

Hornklausel:
Klausel mit *höchstens einem positiven* Literal
z.B. $C = \{\neg q_1, \dots, \neg q_r, q\} \equiv (q_1 \wedge \dots \wedge q_r) \rightarrow q$;
auch $\Box$ ist Hornklausel.

Spezialfälle: C besteht nur aus positivem Literal: *positiv*.
C ohne positive Literale: *negativ*.

Beobachtungen:

Mengen von negativen Hornklauseln trivial erfüllbar ($p_i \mapsto 0$).
Mengen von nicht-negativen Hornklauseln besitzen eindeutige *minimale* erfüllende Interpretationen.

Hornklauseln

Form: $(q_1 \wedge \dots \wedge q_r) \rightarrow q$; negativ: $\neg q_1 \wedge \dots \wedge \neg q_r$

Effizienter Horn-Erfüllbarkeitstest: Grundidee

H Hornklauselmenge; $H^- \subseteq H$ negative Klauseln in H
$H_0 := H \setminus H^-$ nicht negative Klauseln

1. Schritt: Berechne minimale Interpretation $\mathfrak{I}_0 \models H_0$.
2. Schritt: Prüfe, ob $\mathfrak{I}_0 \models H^-$.

Korrektheit

$\mathfrak{I}_0 \models H^- \Rightarrow \mathfrak{I}_0 \models H$.

$\mathfrak{I} \models H \Rightarrow \mathfrak{I} \models H_0$, also $\mathfrak{I}_0 \leqslant \mathfrak{I}$.
$\mathfrak{I} \models H^- \Rightarrow \mathfrak{I}_0 \models H^-$ (und $\mathfrak{I}_0 \models H$).