## Erinnerung: Wortprobleme als Entscheidungsprobleme

Wortproblem zu $L \subseteq \Sigma^*$: $\boxed{\text{Eingabe: } w \in \Sigma^* \quad \text{Entscheide, ob } w \in L}$

Lösung durch Algorithmus $A$ mit

$$w \xrightarrow{A} \begin{cases} \text{“ja”} & \text{falls } w \in L \quad \textit{akzeptieren} \\ \text{“nein”} & \text{falls } w \notin L \quad \textit{verwerfen} \end{cases} \qquad \text{definit!}$$

im Kontrast zu *(einseitigem) Akzeptieren* wie bei NFA/PDA
oder *Erzeugen/Ableiten* wie bei Grammatik

- Zugehörigkeit zu $L$ erkennen $\neq$ Zugehörigkeit entscheiden
- vgl. Problem des Komplement-Abschluss





| **Akzeptieren** | **Entscheiden** |
|---|---|
| NFA $\mathcal{A}$ (nicht-deterministisch!): $w \in L$ gdw. eine akzeptierende Berechnung von $\mathcal{A}$ auf $w$ *existiert* **existiert** | DFA $\mathcal{A}$: $w \xrightarrow{\mathcal{A}} \begin{cases} + & \text{für } w \in L \\ - & \text{für } w \notin L \end{cases}$ |
| Grammatik $G$: $w \in L$ gdw. Ableitung von $w$ in $G$ *existiert* **existiert** | **?** |
| PDA $\mathcal{P}$ (nicht-deterministisch!): $w \in L$ gdw. eine akzeptierende Berechnung von $\mathcal{P}$ auf $w$ *existiert* **existiert** | CYK-Algorithmus $w \xrightarrow{CYK} \begin{cases} + & \text{für } w \in L \\ - & \text{für } w \notin L \end{cases}$ |

vgl. auch **NP/P**





## Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit

- $L$ entscheidbar $\Leftrightarrow$ ($L$ und $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$ semi-entscheidbar)
- $L$ semi-entscheidbar $\Leftrightarrow$ $L$ rekursiv aufzählbar:

Es gibt eine DTM, die nacheinander genau
alle Worte von $L$ (mit Trennungssymbol) auf ihr Band schreibt.

- Die Klasse der entscheidbaren Sprachen ist abgeschlossen unter
  Durchschnitt, Vereinigung *und* Komplement,
  Konkatenation, Stern, ...
- Die Klasse der aufzählbaren Sprachen ist abgeschlossen unter
  Durchschnitt, Vereinigung (und *nicht* unter Komplement),
  Konkatenation, Stern, ...





## Unentscheidbarkeit des Halteproblems — Satz 4.3.4

ein konkretes beweisbar (Turing-)unentscheidbares Problem

arbeite mit Kodierung $\mathcal{M} \mapsto \langle \mathcal{M} \rangle \in \Sigma^*$

**Halteproblem**: Eingabe $\langle \mathcal{M} \rangle$,
Entscheide, ob $\mathcal{M}$ auf Eingabe $\langle \mathcal{M} \rangle$ terminiert

$$\boxed{\mathbf{H} = \{ \langle \mathcal{M} \rangle \in \mathbf{\Sigma}^* \colon \langle \mathcal{M} \rangle \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathrm{STOP} \}}$$

**Satz 4.3.4:** $H$ ist nicht entscheidbar
$H$ semi-entscheidbar, $\overline{H}$ nicht semi-entscheidbar

**Beweis:** Unmöglichkeitsbeweis durch “*Diagonalisierung*” (!)

**Konsequenzen:**

Nachweis der prinzipiellen algorithmischen Unlösbarkeit vieler interessanter Entscheidungs- und Berechnungsprobleme

Trennung von Typ 1, Typ 0, und beliebigen Sprachen (s.u.)

## Halteproblem: Diagonalisierung Satz 4.3.4

$$\boxed{\mathbf{H} = \{\langle\mathcal{M}\rangle \in \boldsymbol{\Sigma}^* : \langle\mathcal{M}\rangle \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathrm{STOP}\}}$$

Annahme, $\mathcal{M}_0$ entscheide $\mathbf{H}$:

für alle $\mathcal{M}$: $\langle\mathcal{M}\rangle \xrightarrow{\mathcal{M}_0} \begin{cases} q^+ & \text{falls } \langle\mathcal{M}\rangle \xrightarrow{\mathcal{M}} \mathrm{STOP} \\ q^- & \text{falls } \langle\mathcal{M}\rangle \xrightarrow{\mathcal{M}} \infty \end{cases}$

$\mathcal{M}_1$ aus $\mathcal{M}_0$: nicht-terminierende Schleife statt $q^+$

dann: $\langle\mathcal{M}_1\rangle \xrightarrow{\mathcal{M}_1} \infty \;\Leftrightarrow\; \langle\mathcal{M}_1\rangle \xrightarrow{\mathcal{M}_1} \mathrm{STOP}$ **Widerspruch!**





## zurück zur Chomsky-Hierarchie → Abschnitt 4.4

### Typ 0 = Semi-Entscheidbarkeit (Satz 4.4.1)

Für $L \subseteq \Sigma^*$ sind äquivalent:

(i) $L$ von Grammatik erzeugt (Typ 0): $L = L(G)$.
(ii) $L$ von einer DTM $\mathcal{M}$ akzeptiert (=aufgezählt): $L = L(\mathcal{M})$.

### Typ 1 Sprachen sind entscheidbar (Satz 4.4.2)

Jede kontextsensitive Sprache (Typ 1)
hat ein entscheidbares Wortproblem.

Bemerkung: nicht jede entscheidbare Sprache ist Typ 1,
aber es gibt ein genau entsprechendes NTM-Niveau





## Chomsky-Hierarchie

$$\boxed{\textbf{Typ 3} \subsetneq \textbf{Typ 2} \subsetneq \textbf{Typ 1} \subsetneq \textbf{Typ 0} \subsetneq \textbf{bel.}}$$

- Trennung durch Pumping Lemmata
- **trennende Beispiele H und $\overline{\mathbf{H}}$**

### Abschlusseigenschaften

| Typ | abgeschlossen unter $\cup$ | $\cap$ | $\overline{\phantom{x}}$ | $\cdot$ | $*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | + | + | + | + | + |
| 2 | + | − | − | + | + |
| 1 | + | + | + | + | + |
| 0 | + | + | − | + | + |
| bel. $\Sigma$-Sprachen | + | + | + | + | + |





## das Wichtigste aus Kapitel 4

**Berechnungsmodelle**
**PDA** und kontextfreie Sprachen
**Turingmaschinen** als **universelles Berechnungsmodell**
**Aufzählbarkeit** und **Entscheidbarkeit**
Striktheit der Chomsky-Hierarchie

## Exkurs: zwei algorithmische Anwendungsideen

**Textsuche (string matching) → KMP Algorithmus** (5.1)

gesucht: guter Algorithmus für einfache Textsuche:

Eingabe: Suchwort $w \in \Sigma^*$ $|w| = m$
Text $t \in \Sigma^*$ $|t| = n$

Ausgabe: alle Stellen $i$, $1 \leqslant i \leqslant n - m + 1$
mit $t_{i,i+m-1} = w$

**Verifikation mit Automaten: model checking** (5.1)

gesucht: Entscheidungsverfahren für das Überprüfen von Systemspezifikationen:

Eingabe: Eigenschaft $E$ (Spezifikation) und Systementwurf $\mathcal{S}$

Ausgabe: $\begin{cases} \text{“ja”} & \text{falls } \mathcal{S} \models E \\ \text{“nein” (+Information)} & \text{falls } \mathcal{S} \not\models E \end{cases}$





**Textsuche naiv**

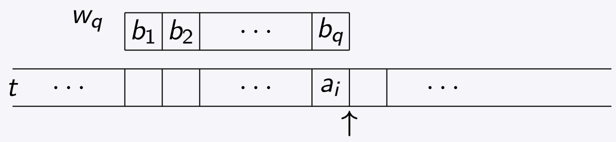
Suchwort $w = b_1 \dots b_m$:
längs Text $t = a_1 \dots a_n$ ermittle in jeder Position $i$,
ob $t_{i,i+m-1} = w$

bis zu $\leqslant m(n - m)$ Vergleiche/Schritte

**Textsuche verbessert** DFA + dynamisches Programmieren

Suchwort $w = b_1 \dots b_m$:
längs Text $t = a_1 \dots a_n$ ermittle in jeder Position $i$

den *maximalen Präfix* $w_q := w_{1,q} = b_1 \dots b_q$ von $w$,
der an dieser Stelle passt ($t_{i-q+1,i} = b_1 \dots b_q$)

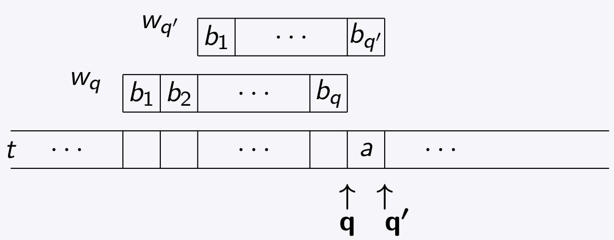



Vorrücken um einen Buchstaben im Text: simuliere passenden DFA





## Textsuche: DFA-Simulation




simuliere den DFA $\mathcal{A}_w = (\Sigma, \{0, \dots, m\}, 0, \delta, \{m\})$

mit $\delta(q, a) = \max\{k : w_k \text{ Suffix von } w_q a\}$

**Knuth, Morris, Pratt**

Berechnung von $\delta$-Werten aus (vorab) tabellierten Daten zu Selbstüberlappungen in $w$
→ Gesamtlaufzeit linear in $n + m$ statt in $n \cdot m$





## model checking (grobe Idee)

| | | |
|---|---|---|
| Systementwurf $\mathcal{S}$ (Transitionssystem) | $\longrightarrow$ | Sprache $L_{\mathcal{S}}$: die Zustandsfolgen in Läufen von $\mathcal{S}$ |
| Spezifikation: Eigenschaft $E$, von allen Läufen gefordert | $\longrightarrow$ | Sprache $L_E$: die Zustandsfolgen mit Eigenschaft $E$ |

**Reduktion auf Leerheitsproblem**

$\mathcal{S} \models E$ gdw. $L_{\mathcal{S}} \subseteq L_E$ gdw. $L_{\mathcal{S}} \cap \overline{L_E} = \emptyset$
**$\mathcal{S}$ erfüllt E** **Leerheitsproblem**

Extra: falls $\mathcal{S} \not\models E$, finde Zustandsfolge
$w \in L_{\mathcal{S}} \setminus L_E$ als Hinweis auf Ursache

## Beispiel zur Übung

**(1) gesucht: minimaler DFA für L(a(bc)* + (abc)*)**

$\alpha = a(bc)^* + (abc)^* \in \mathrm{REG}(\Sigma)$, $\Sigma = \{a, b, c\}$

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 = a(bc)^*$, $\alpha_2 = (abc)^*$

$L(\alpha) = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2)$

- NFA $\mathcal{A}_i$ für $L(\alpha_i)$, $i = 1, 2$
- DFA $\mathcal{A}_i^{\mathrm{det}}$ für $L(\alpha_i)$, $i = 1, 2$
- Produkt DFA für $L(\alpha)$
- NFA $\mathcal{A}$ für $L(\alpha)$
- DFA $\mathcal{A}^{\mathrm{det}}$ für $L(\alpha)$
- Minimierung oder Nachweis der Minimalität





## Beispiel zur Übung

**(2) NFA/DFA für binäre Addition**

für $u_1 = b_{1,1} \dots b_{1,n}$ teste ob $u_3 = u_1 + u_2$ (als Binärzahlen)

$u_2 = b_{2,1} \dots b_{2,n}$

$u_3 = b_{3,1} \dots b_{3,n}$

$$\begin{array}{rl} & b_{1,1} \dots b_{1,n} \\ + & b_{2,1} \dots b_{2,n} \\ \hline & b_{3,1} \dots b_{3,n} \end{array}$$

Alphabet (für Spalten in Addition):

$$\Sigma = (\{0,1\})^3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(u_1, u_2, u_3) \longmapsto w(u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} u_{1,n} \\ u_{2,n} \\ u_{3,n} \end{bmatrix} \in \Sigma^*$$

$L = \{ w(u_1, u_2, u_3) \colon u_3 = u_1 + u_2 \}$

**gesucht: NFA/DFA für L**





## Beispiel zur Übung

**(3) Abschlusseigenschaften**

Sei $L_0$ regulär, $L_1$ kontextfrei.

- folgt, dass $L_0 \cup L_1$ kontextfrei ist?
- folgt, dass $L_0 \cap L_1$ kontextfrei ist?
- folgt, dass $L_0 \setminus L_1$ kontextfrei ist?
- folgt, dass $L_1 \setminus L_0$ kontextfrei ist?

- ist das Komplement einer Typ 0 Sprache stets Typ 0?
- ist Typ 0 abgeschlossen unter Durchschnitt/Vereinigung?





## Beispiel zur Übung

**(4) Automatenkonstruktion: rückwärtslesen**

die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter Wortumkehr $L \mapsto L^{-1}$ (Begründungen?)

- wie gewinnt man aus einem DFA/NFA für $L$ einen DFA/NFA für $L^{-1}$ ?

## Beispiel zur Übung

### (5) Pumping Lemmata

$\Sigma = \{a, b\}$.

- $L = \{ww^{-1} \colon w \in \Sigma^*\}$.
- $L = \{ww \colon w \in \Sigma^*\}$.

allg. Struktur (PL): **wenn** L vom Typ 3/2 ist,
dann **existiert n** $\in \mathbb{N}$, so dass
**für alle w** $\in$ **L mit** $|\mathbf{w}| \geqslant \mathbf{n}$ gilt:
**w lässt sich** so zerlegen, dass ...

negative Anwendung:
**wenn** **für alle n** $\in \mathbb{N}$
**existiert w** $\in$ **L mit** $|\mathbf{w}| \geqslant \mathbf{n}$,
so dass **keine** Zerlegung von $w$ ...
**dann** ist L nicht vom Typ 3/2





## Beispiel zur Übung

### (6) Gammatiken

- gesucht: Grammatik für sparsam geklammerte arithmetische Terme, wie man sie z.B. über $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ verwendet, unter Berücksichtigung von Assoziativität und Konvention zur Priorität der Multiplikation.
- ebenso für diejenigen dieser Terme, die über $\mathbb{N}$ den Wert 0 haben.
- Ist Ihre Lieblings-Programmiersprache regulär? kontextfrei? kontextsensitiv? Wie aufwändig ist der Syntax-Check?





## Arbeitsgruppe Logik, Fachbereich Mathematik

**Mathematische Logik** und **Grundlagen der Informatik**

| | |
|---|---|
| Kohlenbach | Beweistheorie mit Anwendungen |
| Otto | Modelltheorie, Logik in der Informatik |
| Streicher | Semantik von Programmiersprachen |
| Ziegler | reelle Berechenbarkeit und Komplexität |

Einführungsvorlesungen, Spezialvorlesungen, Seminare, ...

die sich insbesondere auch an
interessierte Informatiker wenden

**"Anwendungsfach" Logik:** Nebenfach Mathematik
mit Schwerpunkt aus obigen Bereichen

für FGdI suchen wir immer *interessierte Tutoren*