**Teil I: Formale Grundlagen der Informatik I**
**Endliche Automaten und formale Sprachen**

**Teil II: Formale Grundlagen der Informatik II**
**Logik in der Informatik**

Martin Ziegler

Professor für Angewandte Logik

TU Darmstadt, Fachbereich Mathematik

Sommer 2011

(Folien wesentlich basierend auf Prof. M Otto)

## Inhalt





## Inhalt: FGdI I





## Literatur

J. Hopcroft, R. Motwani, and J. Ullman:
Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation,
Addison-Wesley, 2nd ed., 2001.
(inzwischen auch in deutscher Ausgabe)

U. Schöning:
Theoretische Informatik – kurzgefasst,
Spektrum, 4. Aufl., 2001.

I. Wegener:
Theoretische Informatik – eine algorithmenorientierte Einführung,
Teubner, 1999.

H.R. Lewis and C.H. Papadimitriou:
Elements of the Theory of Computation,
Prentice Hall, 2nd ed., 1998.

## Kapitel 0: Einführung und Beispiele



## Transitionssysteme: Beispiel

Beispiel 0.0.1

Weckzeit-Kontrolle eines Weckers

Zustände: $(h, m, q)$ $\begin{cases} h \in \mathrm{H} = \{0, \dots, 23\} \\ m \in \mathrm{M} = \{0, \dots, 59\} \\ q \in \{\mathrm{NIL}, \mathrm{SETH}, \mathrm{SETM}\} \end{cases}$

Aktionen/Operationen: *set*, $+$

Typische Transitionen z.B.:

$$\begin{array}{rcll}
(h, m, \mathrm{NIL}) & \xrightarrow{+} & (h, m, \mathrm{NIL}) & \text{(da nicht in Setzen Modus)} \\
(h, m, \mathrm{NIL}) & \xrightarrow{set} & (h, m, \mathrm{SETH}) & \text{(in den H-Setzen Modus)} \\
(h, m, \mathrm{SETH}) & \xrightarrow{+} & ((h+1) \bmod 24, m, \mathrm{SETH}) & \text{(H vorstellen)} \\
(h, m, \mathrm{SETH}) & \xrightarrow{set} & (h, m, \mathrm{SETM}) & \text{(weiter in den M-Setzen Modus)} \\
(h, m, \mathrm{SETM}) & \xrightarrow{+} & (h, (m+1) \bmod 60, \mathrm{SETM}) & \text{(M vorstellen)} \\
(h, m, \mathrm{SETM}) & \xrightarrow{set} & (h, m, \mathrm{NIL}) & \text{(Ende Setzen Modus)}
\end{array}$$





## Transitionssysteme: Beispiel

Beispiel 0.0.2

### Mann/Wolf/Hase/Kohl

Zustände:

Verteilungen von $\{m, w, h, k\}$ rechts/links
symbolisiert durch Objekte $[m, w, h, k \| \;], \dots, [m, w \| h, k], \dots$

"erlaubte" Zustände:

rechte und linke Seiten $\neq [w, h]$, $[h, k]$, $[w, h, k]$

Transitionen: Änderung der Verteilung durch Bootsfahrten, z.B.

$[m, w, h, k \| \;] \xrightarrow{k} [w, h \| m, k]$ *m* transportiert *k*

$[m, w, h, k \| \;] \xrightarrow{\square} [w, h, k \| m]$ *m* fährt ohne Passagier

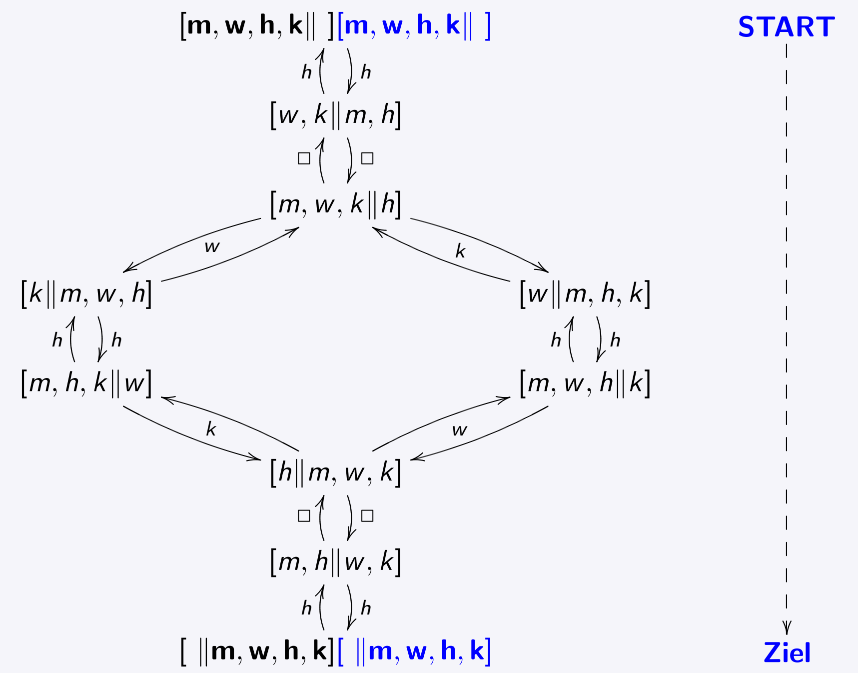




### Mann/Wolf/Hase/Kohl

das vollständige Transitionssystem auf den erlaubten Zuständen

$$\begin{tikzcd}
 & {[m, w, h, k \| \;]} \arrow[d, shift left, "h"] & \\
 & {[w, k \| m, h]} \arrow[u, shift left, "h"] \arrow[d, shift left, "\square"] & \\
 & {[m, w, k \| h]} \arrow[u, shift left, "\square"] \arrow[dl, shift right, "w"'] \arrow[dr, shift left, "k"] & \\
{[k \| m, w, h]} \arrow[ur, shift right, "w"'] \arrow[d, shift left, "h"] & & {[w \| m, h, k]} \arrow[ul, shift left, "k"] \arrow[d, shift left, "h"] \\
{[m, h, k \| w]} \arrow[u, shift left, "h"] \arrow[dr, shift left, "k"] & & {[m, w, h \| k]} \arrow[u, shift left, "h"] \arrow[dl, shift right, "w"'] \\
 & {[h \| m, w, k]} \arrow[ul, shift left, "k"] \arrow[ur, shift right, "w"'] \arrow[d, shift left, "\square"] & \\
 & {[m, h \| w, k]} \arrow[u, shift left, "\square"] \arrow[d, shift left, "h"] & \\
 & {[\; \| m, w, h, k]} \arrow[u, shift left, "h"] &
\end{tikzcd}$$






## Alphabete/Wörter/Sprachen

Definition 0.0.3

**Alphabet**: nicht-leere, endliche Menge $\mathbf{\Sigma}$;
$a \in \Sigma$: Buchstabe/Zeichen/Symbol

**$\mathbf{\Sigma}$-Wort**: endliche Sequenz von Buchstaben aus $\Sigma$,
$\mathbf{w = a_1 \dots a_n}$ mit $a_i \in \Sigma$

**Menge aller $\mathbf{\Sigma}$-Wörter**: $\mathbf{\Sigma^*}$

**leeres $\mathbf{\Sigma}$-Wort**: $\varepsilon \in \mathbf{\Sigma^*}$

**$\mathbf{\Sigma}$-Sprache**: Teilmenge $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{\Sigma^*}$, eine Menge von $\Sigma$-Wörtern

**Konkatenation** von Wörtern und von Sprachen





## Beispiel

Übung 0.0.4

$\Sigma$ Alphabet, $a \in \Sigma$.

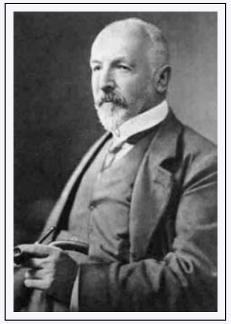
**Aufgabe:** finde ein möglichst einfaches System, das auf einen (online fortlaufenden) Strom von Signalen aus $\Sigma$ zu jedem Zeitpunkt die Information bereithält, ob die Anzahl der bisher eingetroffenen $a$ durch 3 teilbar ist.

- $L_3 = \big(\Sigma'^* \circ \{a\} \circ \Sigma'^* \circ \{a\} \circ \Sigma'^* \circ \{a\} \circ \Sigma'^*\big)^*, \quad \Sigma' := \Sigma \setminus \{a\}$
- $a$-Zähler mit Teilbarkeitstest?
- Reichen endlich viele Zustände?
  Wieviele mindestens?
- Wie verhält sich die Sprache $L_3$ unter Konkatenation?



**Kapitel 1: Mathematische Grundbegriffe
Mengen, Relationen, Funktionen, Strukturen, . . .
elementare Beweistechniken**

## Georg Cantor (1845–1918)



Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche Elemente der Menge genannt werden, zu einem Ganzen

**Beispiele/Standardmengen**

| | |
|---|---|
| $\emptyset = \{\ \}$ | die leere Menge |
| $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ | Menge der Booleschen (Wahrheits)werte |
| $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ | Menge der natürlichen Zahlen (mit 0) |
| $\mathbb{Z}$ / $\mathbb{Q}$ / $\mathbb{R}$ | Mengen der ganzen/rationalen/reellen Zahlen |





## Mengenbegriff (Cantor)

- *unstrukturierte* Sammlung von Objekten (Elementen); z.B. $A = \{a, b, c\} = \{b, a, a, c\}$
- die Gesamtheit ihrer Elemente legt die Menge fest (*Extensionalität*)
- über naiv aufzählende Spezifikation und die einfachsten Operationen hinausgehende Prinzipien (v.a. für die Existenz unendlicher Mengen)

  $\longrightarrow$ *axiomatische Mengenlehre* (Zermelo, Fraenkel, ZFC)





## Mengen/Mengenoperationen $\rightarrow$ Abschnitt 1.1.1

**Mengen** $A, B, \ldots$

**Elementbeziehung**: $a \in A$ bzw. $a \notin A$ für "nicht $a \in A$"

**Teilmengenbeziehung (Inklusion)**: $B \subseteq A$

z.B. $\emptyset \subseteq \{0, 1\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

**Potenzmenge**: $\mathcal{P}(A) = \{B \colon B \subseteq A\}$
die Menge aller Teilmengen von $A$

**Mengengleichheit**: $A = B$ gdw ($A \subseteq B$ und $B \subseteq A$)
[genau dieselben Elemente]
Extensionalität

**Definition von Teilmengen**: $B := \{a \in A \colon p(a)\}$
für eine Eigenschaft $p$





## Boolesche Mengenoperationen

**Durchschnitt**: $A \cap B = \{c \colon c \in A \text{ und } c \in B\}$

$A, B$ disjunkt gdw $A \cap B = \emptyset$

**Vereinigung**: $A \cup B = \{c \colon c \in A \text{ oder } c \in B\}$

**Mengendifferenz**: $A \setminus B = \{a \in A \colon a \notin B\}$

**Komplement**:
für Teilmengen einer festen Menge $M$, d.h. in $\mathcal{P}(M)$:

$\overline{B} := M \setminus B$ [Komplement bzgl. $M$]

**Kommutativgesetze** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

**Assoziativgesetze** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

**Distributivgesetze** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

## Boolesche Mengenoperationen, Bemerkungen

große Vereinigungen/Durchschnitte über beliebige Familien von Mengen $(A_i)_{i\in I}$:

- $\bigcup_{i\in I} A_i = \big\{a\colon a \in A_i \text{ für mindestens ein } i \in I\ \big\}$
- $\bigcap_{i\in I} A_i = \big\{a\colon a \in A_i \text{ für alle } i \in I\ \big\}$

Beispiele: $\Sigma^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma^n$

$\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\} = \{w \in \Sigma^*\colon |w| \geqslant 1\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \Sigma^n$

Beispiel (reelle Intervalle): $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} [n - 1/m, n + 1/m] \;= ?$





## Tupel und Mengenprodukte

**geordnete Paare**: $(a, b)$ mit erster Komponente $a$, zweiter Komponente $b$

**n-Tupel**: $(a_1, \dots, a_n)$ mit $n$ Komponenten $(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$

**Kreuzprodukt (kartesisches Produkt)**:

$A \times B = \{(a, b)\colon a \in A, b \in B\}$

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \big\{(a_1, \dots, a_n)\colon a_i \in A_i \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant n\big\}$

$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ mal}}$ Menge aller $n$-Tupel über $A$.

Bemerkung:
wir identifizieren $n$-Tupel über $\Sigma$ mit $\Sigma$-Wörtern der Länge $n$ und Wörter der Länge 1 mit Buchstaben, $\Sigma^1 = \Sigma$.





## Relationen über einer Menge A → Abschnitt 1.1.2

**n-stellige Relation**: $R \subseteq A^n$
Menge von $n$-Tupeln über $A$

Beispiele: Kantenrelation eines Graphen, Präfixrelation auf $\Sigma^*$, Ordnungsrelationen, Äquivalenzrelationen, ...

**Kantenrelationen in Graph/Transitionssystem**:

$(u, v) \in E$ beschreibt $E$-Kante $u \xrightarrow{E} v$

**Präfixrelation auf $\mathbf{\Sigma^*}$**:

$u \preccurlyeq v$ gdw. $u$ Anfangsabschnitt (Präfix) von $v$

$\preccurlyeq\; = \big\{(u, uw)\colon u, w \in \Sigma^*\big\} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$

oft auch *infixe* Notation: $aRb$ statt $(a, b) \in R$





## Äquivalenzrelationen

wichtige potentielle Eigenschaften für 2-stelliges $R \subseteq A^2$:

**Reflexivität**: für alle $a \in A$ gilt: $aRa$.

**Symmetrie**: für alle $a, b \in A$ gilt: $aRb \Leftrightarrow bRa$.

**Transitivität**: für alle $a, b, c \in A$ gilt: $(aRb$ und $bRc) \Rightarrow aRc$.

z.B. Präfixrelation: reflexiv und transitiv, nicht symmetrisch

| |
|---|
| **Äquivalenzrelation $\mathbf{R \subseteq A^2}$**: |
| **reflexiv**, **symmetrisch** und **transitiv** |

Beispiele: Gleichheit (über $A$), Längengleichheit über $\Sigma^*$, gleicher Rest bei Division durch $n$ über $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$, ...

**Idee:** Äquivalenzrelationen als verallgemeinerte Gleichheiten

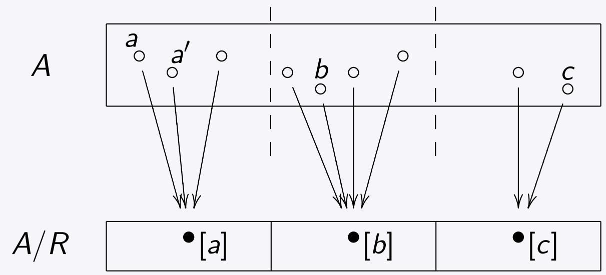
## Äquivalenzklassen:

für Äquivalenzrelation $R \subseteq A^2$ auf $A$, $a \in A$:

$[a]_R := \{b \in A \colon aRb\}$
die **Äquivalenzklasse von a**

**wichtig**: $A$ wird durch die Äquivalenzklassen in disjunkte Teilmengen zerlegt (Lemma 1.1.8), sodass

$aRb$ gdw $[a]_R = [b]_R$







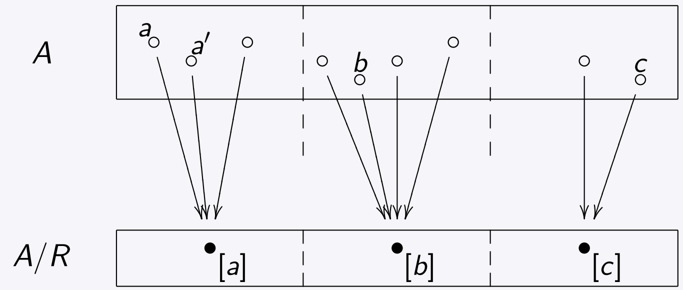

## Äquivalenzrelationen: Quotient, natürliche Projektion

**Quotient A/R** : die Menge aller Äquivalenzklassen von $R$,

$$A/R := \{[a]_R \colon a \in A\}$$

die **natürliche Projektion** $\pi_R \colon A \longrightarrow A/R$, $a \longmapsto [a]_R = \{b \in A \colon aRb\}$

ordnet jedem Element seine Äquivalenzklasse zu

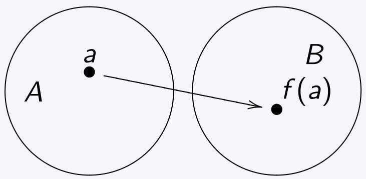







## Funktionen und Operationen → Abschnitt 1.1.3

**Funktion f von A nach B**: $f \colon A \longrightarrow B$, $a \longmapsto f(a)$




$f(a)$ ist das *Bild von* $a$ unter $f$;
$a$ ein *Urbild* von $b = f(a)$.

**wesentlich**: eindeutig definierter Funktionswert $f(a) \in B$ für jedes $a \in A$

$A$: **Definitionsbereich**

$B$: **Zielbereich**

$f(a)$ **Bild** von $a$ unter $f$.

$f[A] := \{f(a) \colon a \in A\} \subseteq B$ **Bild(menge)** von $f$.





## Funktionen, Operationen, Beispiele

**n-stellige Funktion auf A**: Funktion $f \colon A^n \to B$.

**n-stellige Operation auf A**: Funktion $f \colon A^n \to A$.

Beispiele: Addition, Multiplikation auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ...

Beispiel **Konkatenation** auf $\Sigma^*$:

$$\cdot \colon \Sigma^* \times \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*, \quad (u,v) \longmapsto u \cdot v \ (= uv).$$

Für $u = a_1 \dots a_n$ ; $v = b_1 \dots b_m$ ist $uv := \underbrace{a_1 \dots a_n}_{u}\underbrace{b_1 \dots b_m}_{v}$