

Ein Vortrag zur Quantenlogik im Rahmen des
Quant-seminars an der TU-Darmstadt

Ein Hauch von Quantenlogik

Wiebke Klement

2. April 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Wie sind die Aussagen aufgebaut?	2
2	Physikalische Sicht	2
2.1	Die Axiome der Quantenphysik	3
2.2	Spektralmaß	4
3	Verbandtheorie	5
3.1	Was ist ein Verband?	5
3.2	Eigenschaften von Verbänden	6
3.3	Orthomodularität	7
4	Der Hilbertverband $P(\mathcal{H})$	9
4.1	Ist es ein Verband?	9
4.1.1	Halbordnung?	9
4.1.2	Schnitt?	9
4.1.3	Join?	9
4.1.4	Orthokomplement?	10
4.2	Wie steht es mit Modularität?	10
4.2.1	Ist \mathcal{H} endlichdimensional dann ist $P(\mathcal{H})$ modular.	10
4.2.2	Ist \mathcal{H} unendlichdimensional dann ist es nur orthomodular.	11
5	Quantenlogik	12
5.1	Vergleich zur Newtonschen Logik	12
5.1.1	Negation	12
5.1.2	Distributivität	12

1 Einleitung

Quantenlogik, was ist das? Das Wort besteht aus zwei Teilen, Logik und Quanten. Die Logik ist das Untersuchen von der Gültigkeit von Aussagen und welche Schlussfolgerungen möglich sind. Quanten bezieht sich auf die Quantenphysik in der etwas anders als klassisch gefolgert werden kann.

1.1 Wie sind die Aussagen aufgebaut?

Was für Aussagen werden eigentlich untersucht? Greifen wir uns nun eine typische Aussage der Quantenphysik heraus:

Wird am präparierten Zustand ψ eine Spin-Messung in Richtung eines zweiten Vektors m vorgenommen, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Teilchen mit einer Spinorientierung in dieser Richtung vorzufinden gleich w .

Diese Aussage kann in ihre Komponenten zerlegt werden:

- eine meßbare physikalischen Größe M
- ein Messergebniss B
- eine Warscheinlichkeit w
- ein Zustand ψ

Die Aussage $Sent$ hängt von M , B und w ab: $Sent(M, B, w)$ und ist wahr wenn es einen Zustand gibt der sie erfüllt $\psi \in Sent(M, B, w)$

Man kann sich nun überlegen, daß wenn eine Aussage für einen festen Zustand nur mit einer Wahrscheinlichkeit $w \in [0; 1]$ wahr ist, wir uns in einer mehrwertigen Logik befinden. Zur Vereinfachung wird $w \in \{1, 0\}$ gesetzt, und nur Zustände in denen bei Messen von M das Ergebniss mit Sicherheit in B liegt betrachtet.

2 Physikalische Sicht

Geschichtlich musste die Quantenphysik, genau wie jede andere physikalische Theorie, erfunden werden, weil Experimente gemacht wurden, deren Ergebnisse mit den bisherigen Erkenntnissen nicht erklärt werden konnten. Das waren insbesondere Doppelspaltexperimente, das Betrachten von Spektrallinien und der photoelektrische Effekt. Die Quantenmechanik kann also nicht aus grundlegenden, bereits vorhandenen, Prinzipien hergeleitet werden. Sie wird daher meist axiomatisch aufgezogen. Wir brauchen für unsere Betrachtung zwar nicht alle Axiome, dennoch seien sie der Vollständigkeit halber hier aufgelistet. *Bemerkung: In der Literatur werden manchmal die Axiome 3 bis 5 zu einem zusammengefasst.*

2.1 Die Axiome der Quantenphysik

Axiom 1 (der Wellenfunktionshilbertraum). *Der Zustand eines quantenmechanischen Systems ist durch die Angabe der zugehörigen Wellenfunktion vollständig beschrieben. Die möglichen Wellenfunktionen eines quantenmechanischen Systems bilden einen Hilbertraum \mathcal{H} .*

Die Linearkombinationen von Zuständen werden Superpositionen genannt, das kommt daher, daß Interferenzen gemessen werden und man die Namensgebung an die Elektrotechnik anlehnt, der Unterschied besteht darin, daß es sich hier um komplexwertige Wellenfunktionen handelt. Der berühmteste Zweifel an diesem Axiom war Schrödingers Katze in einer Linearkombination von lebendig und tot.

Axiom 2 (Messen durch lineare Operatoren). *Jeder meßbaren physikalischen Größe eines quantenmechanischen Systems entspricht ein linearer hermitescher Operator auf dem zugehörigen Hilbertraum. Die physikalischen Eigenschaften der Observablen werden durch die mathematischen Eigenschaften des zugehörigen Operators bestimmt.*

Typische Observablen sind:

- Ort $\hat{x}, \hat{q}_i, \vec{\hat{r}}$
- Potential $\hat{V}(\hat{x})$
- Impuls $\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$
- kinetische Energie $\hat{T} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2$
- Drehimpuls $\vec{\hat{L}} = \vec{\hat{r}} \times \vec{\hat{p}}$
- Energie, Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$

Axiom 3 (Messwerte sind Eigenwerte). *Einzig mögliche Meßwerte einer physikalischen Größe sind die Eigenwerte des zugehörigen linearen Operators.*

Da in der realen Welt nur reelle Zahlen als Messwerte auf Skalen abgelesen werden können ergibt sich hieraus die Beschränkung auf Operatoren mit reellen Eigenwerten. Wenn nun die Eigenvektoren eine Orthogonalbasis bilden sollen bleiben nur noch die Hermiteschen Operatoren.

Axiom 4 (Messwahrscheinlichkeit). $W(a_i) = |\int d\tau \psi_i^*(\tau) \psi(\tau)|^2$

Erwartungswert $\langle a | M | a \rangle$

Axiom 5 (Wellenkollaps). *Wird eine Messung der zum Operator gehörenden physikalischen Größe an einem durch die Wellenfunktion ψ beschriebenen quantenmechanischen System durchgeführt, so befindet sich das System unmittelbar nach der Messung in einem Eigenzustand von zum bei der Messung als Meßergebnis herausgekommenen Eigenwert a_n .*

Das Postulat kommt aus der Beobachtung daß wiederholte Messungen zum gleichen Ergebniss führen. Wann genau die Wellenfunktion kollabiert ist noch nicht so klar, spätestens jedoch bei der Messung. Jede Interaction eines Teilchens mit seiner Umwelt kann als Messung aufgefasst werden.

Ein schönes Hosentaschenexperiment bei dem die Auswirkungen einer den Zustand verändernden Messung sichtbar werden funktioniert mit polarisiertem Licht. Hierbei wird die Messung den Zustand des Lichts verändern. Hat man einen polarisierten Lichtstrahl, (LCD-Bildschirm) und zwei Polarisierungsfilter (3D Brillen oder Kamerafilter) so kann man mit einem der Filter durch drehen feststellen in welche Richtung das Licht polarisiert ist (Messung). Positioniert man diesen Filter so, daß kein Licht mehr hindurchkommt, und schiebt man den zweiten Filter in einem anderen Winkel zwischen Bildschirm und Brille so kommt doch Licht hindurch, der zweite Filter hat also die Polarisierung verändert.

Axiom 6 (Änderungen mit Schrödinger). *Die zeitliche Entwicklung eines physikalischen Systems, das zum Zeitpunkt t_0 durch die Wellenfunktion $\psi(\vec{r}; t_0)$ beschrieben wird, wird festgelegt durch die Schrödingergleichung:*

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (1)$$

wobei \hat{H} der zu dem System gehorende Hamiltonoperator ist.

2.2 Spektralmaß

Wenn ich nun Aussagen betrachten will die mit Sicherheit wahr sind $Sent(M, B, 1)$ dann folgt aus **Axiom 3** und **Axiom 5** daß die entsprechenden Zustände ψ für ein $b \in B$ in dem Eigenraum von M zu b liegen müssen. Darf $b_1 \in B$ oder $b_2 \in B$ Messergebniss sein liegen die Zustände ψ_i in dem Spann der Entsprechenden Eigenräume.

Es ist also wichtig sich die Struktur der Unterräume des Hilbertraums \mathcal{H} anzuschauen. Dazu gibt es ein hilfreiches Werkzeug aus de Funktionalanalysis

Definition 1 (Das Spektralmaß). Ein Spektralmaß ist eine Abbildung, die gewissen Teilmengen einer fest gewählten Menge orthogonale Projektionen eines Hilbertraumes zuordnet.

Definition 2 (Spektrum). Das Spektrum eines Operators A ist die Menge aller Elemente λ des Zahlenkörpers (meistens die komplexen Zahlen), für die die Differenz des Operators mit dem λ -fachen Einsoperator $A - \lambda 1$ nicht (beschränkt) invertierbar ist. Das Spektrum des Operators wird mit $\sigma(A)$ bezeichnet und die Elemente des Spektrums heißen **Spektralwerte**.

Definition 3 (Projektionswertiges Spektralmaß $P_M(B)$). Es muss gelten:

$$\begin{aligned} P_M(\emptyset) &= 0 \\ P_M(\mathbb{R}) &= I \end{aligned}$$

Im endlichdimensionalen ist das recht anschaulich.

Der Operator M kann mit einer Matrix beschrieben werden, diese wiederum lässt sich diagonalisieren. T ist die Transformationsmatrix aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten μ_i, ρ_i .

$$M = T \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \mu_n & & & \\ & & & \rho_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \rho_n \end{pmatrix} T^{-1} \quad (2)$$

Eine Borelmenge von Eigenvektoren B wird auf den Operator/Matrix P_{MB} abgebildet, der orthogonal auf den von den Eigenräumen zu B aufgespannten Unterraum von \mathcal{H} projiziert.

$$B = \{\mu_1 \dots \mu_n\} \rightarrow T \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = P_{MB} \quad (3)$$

3 Verbandtheorie

3.1 Was ist ein Verband?

Definition 4 (Der Verband algebraisch). Ein Verband ist eine Menge mit 2 Verknüpfungen Vereinigung (*join*) \vee und Schnitt (*meet*) \wedge welche die Assoziativität, Kommutativität und die Absorptionsgesetze erfüllen.

Assoziativität:

$$u \vee (v \vee w) = (u \vee v) \vee w$$

$$u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$$

Kommutativität:

$$u \vee v = v \vee u$$

$$u \wedge v = v \wedge u$$

Absorptionsgesetze:

$$u \vee (u \wedge v) = u$$

$$u \wedge (u \vee v) = u$$

Definition 5 (Der Verband als Halbordnung). Man kann sich einen Verband auch als Halbordnung \mathfrak{B} denken,

$$v \leq w \iff v \vee w = w \quad (4)$$

bei der je zwei Elemente ein **Supremum** und ein **Infimum** haben:

$$\sup = v \cup w \quad (5)$$

$$\inf = v \cap w \tag{6}$$

Beispiel (Bekannte Verbände). Mengenverbände mit Enthaltensein als Ordnung, Schnitt und Vereinigung wie gewohnt.

Teilerverbände von natürlichen Zahlen. Meet ist ggT und Join der kgV.

3.2 Eigenschaften von Verbänden

Definition 6 (Vollständigkeit). Hat jede Teilmenge A von \mathfrak{B} ihr \sup \inf heißt der Verband **vollständig**.

$$\inf_A = \bigwedge_A a; a \in A \tag{7}$$

$$\sup_A = \bigvee_A a; a \in A \tag{8}$$

Definition 7 (Beschränktheit). Wir nennen:

$$\bigwedge_{\mathfrak{B}} a := 0 \tag{9}$$

$$\bigvee_{\mathfrak{B}} a := 1 \tag{10}$$

Ein Verband mit **0** und **1** heißt **beschränkt**.

Definition 8 (Das Komplement). ist eine Abbildung $a \rightarrow a^\perp$ mit den Eigenschaften daß:

$$a^\perp \vee a = 1 \tag{11}$$

$$a^\perp \wedge a = 0 \tag{12}$$

es kommt dabei das neutrale Element der jeweils anderen Verknüpfung raus.

Definition 9 (Das Orthokomplement). ist ein Komplement mit Involution

$$a^{\perp\perp} = a \tag{13}$$

Ordnungsumkehr

$$a \leq b \Rightarrow b^\perp \leq a^\perp \tag{14}$$

Satz 1 (De Morgan). *Die De Morganschen Gesetze gelten*

$$\left(\bigwedge_n A_n\right)^\perp = \bigvee_n A_n^\perp \quad (15)$$

$$\left(\bigvee_n A_n\right)^\perp = \bigwedge_n A_n^\perp \quad (16)$$

Beweis. Es reicht eins von Beiden zu zeigen da einsetzen von A_n^\perp für A_n und beidseitige Komplementbildung eine Gleichung in die andere überführt.

(\Rightarrow)

Jede Menge A_i ist kleiner als sie selbst mit anderen Vereinigt, also gilt:

$$A_i^\perp \leq \left(\bigvee_n A_n\right)^\perp$$

Durch Komplementbildung auf beiden Seiten ergibt sich

$$A_i \geq \bigvee_n A_n$$

Da das für jedes A_i gilt gilt es auch für den Schnitt:

$$\bigwedge_i A_i \geq \bigvee_n A_n$$

(\Leftarrow)

Da folgende Ungleichung gilt:

$$\bigwedge_n A_n^\perp \leq A_i^\perp$$

gilt durch beiseitige Komplementbildung

$$\left(\bigwedge_n A_n^\perp\right)^\perp \geq A_i$$

wiederum für jedes A_i und damit wieder für den Schnitt:

$$\left(\bigwedge_n A_n^\perp\right)^\perp \geq \bigvee_n A_i$$

nochmalige beidseitige Komplementbildung ergibt das gewünschte:

$$\bigwedge_n A_n^\perp \leq \left(\bigvee_n A_i\right)^\perp$$

□

Satz 2 (Jeder endliche Verband ist vollständig und beschränkt.). *Das ist nicht schwer einzusehen.*

3.3 Orthomodularität

Immer wenn zwei Verknüpfungen vorhanden sind, stellt sich die Frage wie sie sich vertragen, insbesondere bei auflösen der Klammern. Es ist leider nicht immer eine volle Verträglichkeit vorhanden und somit gibt es statt den klassischen Verteilungsgesetzen nur abgeschwächte Varianten. Beginnen wir jedoch mit etwas festem:

Satz 3 (Jeder Verband ist einseitig distributiv).

$$A \vee (B \wedge C) \leq (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (17)$$

$$A \wedge (B \vee C) \geq (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (18)$$

Dieser Satz ist eine direkte Konsequenz aus der Isotonie aller Verbandspolynome bezüglich der in ihnen vorkommenden Variablen.

Für den Beweis siehe S31,32 von QLiAA

Definition 10 (Distributivität).

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (19)$$

Definition 11 (Modularität).

$$(A \leq B) \Rightarrow (A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)) \quad (20)$$

Lemma 4 (Kurzform M). *Modularität läßt sich vereinfachen zu:*

$$(A \leq B) \Rightarrow A \vee (B \wedge C) = B \wedge (A \vee C) \quad (21)$$

Beweis. Aus $(A \leq B)$ folgt $B = (A \vee B)$ und einsetzen in die Gleichung ergibt das Gewünschte. \square

Definition 12 (Orthomodularität).

$$(A^\perp \leq C)(A \leq B) \Rightarrow A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (22)$$

Lemma 5 (Kurzform OM). *Orthomodularität läßt sich vereinfachen zu:*

$$(A \leq B) \Rightarrow A \vee (B \wedge A^\perp) = B \quad (23)$$

Beweis. (\Rightarrow)

Mit $C = A^\perp$ und der Bemerkung daß $A \vee B = B$ wird OM zu der Kurzform:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \vee (B \wedge A^\perp) = (A \vee B) \wedge (A \vee A^\perp)$$

$$A \vee (B \wedge A^\perp) = B \wedge I$$

$$A \vee (B \wedge A^\perp) = B$$

(\Leftarrow) Wir wissen wiederum daß $A \vee B = B$.

Eine Seite der Rückrichtung ist durch die einseitige Distributivität gegeben:

$$A \vee (B \wedge C) \leq B \wedge (A \vee C)$$

es bleibt zu zeigen, daß aus der Kurzform und $A^\perp \leq C$ die zweite Ungleichung folgt

Aus $C \geq A^\perp$ folgen

$$\text{I) } A \vee C \geq A \vee A^\perp = I$$

$$\text{II) } C \wedge B \geq A^\perp \wedge B$$

Aus II folgt wiederum

$$\text{III) } A \vee (C \wedge B) \geq A \vee (A^\perp \wedge B)$$

aus III folgt mit I und der Kurzform

$$A \vee (C \wedge B) \geq B \wedge (A \vee C)$$

\square

4 Der Hilbertverband $P(\mathcal{H})$

Definition 13 (Hilbertraum). Ein Hilbertraum ist ein Vektorraum mit Skalarprodukt in dem jede Cauchifolge konvergiert.

4.1 Ist es ein Verband?

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum. Sei $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ ein Unterraum. \mathcal{H}_0 ist nur dann ein Hilbertraum wenn er abgeschlossen ist.

$P(\mathcal{H})$ bestehe aus allen Unterhilberträumen: Ist das ein Verband? Wir untersuchen:

4.1.1 Halbordnung?

Es ist nicht schwer eine Ordnung auf $P(\mathcal{H})$ zu definieren: Es sei

$$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2 \Leftrightarrow \mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \quad (24)$$

4.1.2 Schnitt?

Auch *Meet* ist kein Problem. Es reicht der mengentheoretische Schnitt.

$$\bigwedge_i \mathcal{G}_i \equiv \bigcap_i \mathcal{G}_i \quad (25)$$

4.1.3 Join?

Bei *Join* ist es schon komplizierter, denn die Vereinigung aus der Mengenlehre ist kein Vektorraum. Es eignet sich also viel mehr die Summe der Unterräume:

$$\sum_i \mathcal{G}_i = \left\{ \eta \in \mathcal{H} \mid \eta = \sum_i \zeta_i \ ; \ \zeta_i \in \mathcal{G}_i \right\} \quad (26)$$

Da es hier aber um Hilberträume geht ist es im Unendlichen notwendig den Abschluss zu bilden damit garantiert ein Unterhilbertraum entsteht. Und somit ist hier *Join* folgendermaßen definiert:

$$\bigvee_i \mathcal{G}_i \equiv \overline{\sum_i \mathcal{G}_i} \in \quad (27)$$

Damit ist $P(\mathcal{H})$ ein Verband!

4.1.4 Orthokomplement?

Zur weiteren Untersuchung der Eigenschaften von $P(\mathcal{H})$ definieren wir uns ein geeignetes Orthokomplement:

$$\mathcal{G}^\perp = \{\eta \in \mathcal{H} \mid \langle \eta | \zeta \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \zeta \in \mathcal{G}\} \quad (28)$$

und die Definition ist auch stimmig mit allen Bedingungen:

Involution: $\mathcal{G}^{\perp\perp} = \mathcal{G}$

Ordnungsumkehr: $\mathcal{G} \leq \mathcal{F} \iff \mathcal{F}^\perp \leq \mathcal{G}^\perp$

und

$$\mathcal{G} \wedge \mathcal{G}^\perp = 0$$

$$\mathcal{G} \vee \mathcal{G}^\perp = 1 = \mathcal{H}$$

4.2 Wie steht es mit Modularität?

Das ein Verband von Unterräumen im allgemeinen nicht distributiv ist ist nicht schwer einzusehen.

Wir wollen nun folgende zwei Aussagen zeigen:

I) Ist \mathcal{H} endlichdimensional dann ist $P(\mathcal{H})$ modular.

II) Ist \mathcal{H} unendlichdimensional dann ist es nur orthomodular.

4.2.1 Ist \mathcal{H} endlichdimensional dann ist $P(\mathcal{H})$ modular.

Beweis. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in P(\mathcal{H})$ Unterhilberträume von \mathcal{H} .

Wir haben: 1.) aus der Voraussetzung, daß $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ gilt.

2.) Wegen der Endlichkeit der Dimension können wir jedes Element ξ aus dem *Join* von \mathcal{A} und \mathcal{C} als Linearkombination von Elementen aus \mathcal{A} und \mathcal{C} schreiben

Die Modularitätsgleichung lautet:

$$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = \mathcal{B} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \quad (29)$$

Eine Seite folgt aus dem einseitigen Distributivgesetz.

Für die andere sei nun $\mu \in \mathcal{B} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$. Dann ist

I) $\mu \in \mathcal{B}$ und

II) $\mu \in \mathcal{A} \vee \mathcal{C}$.

aus II wissen wir

III) $\mu = \mu_{\mathcal{A}} + \mu_{\mathcal{C}}$

was sich umformen lässt zu

IV) $\mu_{\mathcal{C}} = \mu - \mu_{\mathcal{A}}$

hieran kann man mit I und 1. ablesen, daß:

V) $\mu_{\mathcal{C}} \in \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ ist

Weiß man dies folgt aus III daß

$$\mu \in \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$$

□

4.2.2 Ist \mathcal{H} unendlichdimensional dann ist es nur orthomodular.

Ich zeige zuerst:

Ist \mathcal{H} unendlichdimensional dann ist es orthomodular.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus der Definition eines Orthokomplementes in einem Hilbertraum.

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in P(\mathcal{H})$ mit $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$

Dann ist \mathcal{B} ein großer Hilbertraum und \mathcal{A} ein Unterhilbertraum von \mathcal{B}

Das Orthokomplement von \mathcal{A} in \mathcal{B} ist dann $(\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}^\perp)$.

Also gilt bereits:

$$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}^\perp) = \mathcal{B} \quad (30)$$

□

Nun fehlt noch:

Ist \mathcal{H} unendlichdimensional dann ist es nicht modular.

Beweis. Da im endlichdimensionalen Fall $P(\mathcal{H})$ modular ist scheitert die Modularität an dem Unterschied zum unendlichdimensionalen Fall. Das wäre dann der Abschluss in der Definition vom *Join*.

Greifen wir uns ein Element aus dem Abschluss heraus:

$$\eta_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \quad (31)$$

Wir wollen nun Unterräume $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in P(\mathcal{H})$ basteln:

η_n bilden eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} .

Außerdem definieren wir uns für $a > 1$:

$$\xi_n = \eta_{2n} + a^{-n}\eta_1 + a^{-2n}\eta_{2n+1}$$

Dann seien:

$$\text{I) } \mathcal{A} := \overline{\text{span}\{\xi_n\}}$$

$$\text{II) } \mathcal{B} := \overline{\text{span}\{\xi_n, \eta_1\}}$$

$$\text{III) } \mathcal{C} := \overline{\text{span}\{\eta_{2n}\}}$$

Offensichtlich gilt $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$.

Wir zeigen daß sogar $\mathcal{A} < \mathcal{B}$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \ni \gamma_n &= \eta_{2n} + a^{-n}\eta_1 + a^{-2n}\eta_{2n+1} - a^{-n}\eta_1 = \\ &= \eta_{2n} + a^{-2n}\eta_{2n+1} \notin \mathcal{A} \end{aligned}$$

Und nun:

Aus $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ folgt direkt

$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \leq (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$$

Betrachten wir nun die θ_n :

$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \ni \theta_n = a^n \xi_n - a^n \eta_{2n} = \eta_1 - a^{-n} \eta_{2n+1}$$

So wissen wir daß unser zu Beginn erwähltes η_1 dort auch enthalten ist:

$$(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \ni \eta_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$$

Da aber aus der Konstruktion das η_1 das Einzige war was sie unterschieden hat gilt folgende Gleichung

$$\text{IV) } (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) = (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$$

und würde nun Modularität gelten

$$\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = \mathcal{B} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$$

Kann man mit einsetzen der Definitionen II und III sowie mit IV dies umformen zu:

$$\mathcal{A} \vee 0 = \mathcal{B} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$$

woraus folgt daß

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}$$

Was aber im Widerspruch zu

$$\mathcal{A} < \mathcal{B}$$

steht.

Also gilt Modularität nicht!

□

5 Quantenlogik

5.1 Negation

Es stellt sich die Frage wie in unserem Kontext die Verneinung einer Aussage zu verstehen ist, denn außer dem klassischen in dem eine Aussage genau dann falsch ist wenn sie nicht wahr ist, bietet sich hier eine Alternative an.

Die klassische Negation wird auch **Ausschließverneinung** genannt (exclusion negation) denn

$Sent(M, B, 1)$ ist genau dann für ψ falsch wenn $\psi \notin h(Sent(M, B, 1))$.

Hierbei sind *falsch* und *nicht wahr* Synonyme.

Wir könnten nun alternativ die beiden Begriffe auseinanderziehen und *falsch* nur für eine Teilmenge von *nicht wahr* verwenden. Diese Art der Negation wird **Wahlverneinung** genannt (choise negation). In unserem Fall ist das wenn

$Sent(M, B, 1)$ ist genau dann für ψ falsch wenn $\psi \in (h(Sent(M, B, 0)))^\perp$.

5.2 Distributivität

Nicht allein die Negation ist anders sondern dadurch daß $P(\mathcal{H})$ nur orthomodular ist, tut Sorgfalt beim Schließen Not. Denn all zu leicht verfällt ein jeder intuitiv in das Anwenden des Distributivgesetzes.

Doch nicht nur daß es ungewohnt ist nur Orthomodularität zu verwenden, es hat auch dazu geführt daß Von Neumann und Birkhoff die Interpretation der Quantenphysik als Hilbertverbandt angezweifelt haben. Sie stellten ein alternatives Konzept vor, das auf Von Neumann Verbänden beruht.

Orthomodularität kommt ja daher daß die Aussagen die nur wahrscheinlich wahr sind nicht betrachtet werden. Auch das kann anders aufgenommen werden.

5.3 Bibliografie

Meine Hauptquelle, aus der nahezu alle Beweise stammen war

Quantum Logic in Algebraic Approach von *Miklós Rédei*

ISBN 0-7923-4903-2

Die meisten Hasse-Diagramme aus meiner Powerpoint waren von

Orthomodular Lattices von *Ladslav Beran*

ISBN 90-277-1715-X

und Wikipedia inspiriert.

Weiterführende Informationen stehen in Buch 15 der *Encyclopédia of Mathematics and its Applications*:

The Logic of Quantum Mechanics von *Enrico G. Beltrametti und Gianni Cassinelli*

ISBN 0-201-13514-0

Außerdem habe ich den physikalischen Teil auf

Crashkurs Quantenmechanik von *Markus Vogt*

<http://agnes.dida.physik.uni-essen.de/backhaus/Quanten/Vogt/MathFormQm.pdf>

und dem

Skript **Theoretische Chemie** cap 4 Axiomatische Quantenmechanik des FB Chemie der Uni Mainz,

<http://www.uni-mainz.de/FB/Chemie/AG-Theoretische/pc2/qm/Kapitel4.pdf>

basiert.