Technische Universität Darmstadt
Fachbereich Mathematik
Schlossgartenstraße 7
64289 Darmstadt, Germany

Logik Seminar Quant*, M. Ziegler

Reell abgeschlossene Körper

Daniel Günzel

23. März 2011

1 Einführung

Im Folgenden wollen wir uns mit reell abgeschlossenen Körpern befassen. Dafür werden wir zunächst einige dafür notwendige Begriffe einführen und definieren. Zudem ist es nützlich zusätzlich zu den Definitionen Charakterisierungen einzuführen, mit deren Hilfe man leichter zeigen kann, dass ein Körper reell abgeschlossen ist.

Definition 1.1. Ein Körper K ist *reell* falls sich -1 nicht als Summe aus Quadraten aus K darstellen lässt:

$$\forall k_i \in K, \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} k_i^2 \neq -1.$$

Definition 1.2. Eine Teilmenge C eines Körpers K heißt *Kegel*, wenn diese unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist und alle Quadrate aus K enthält:

1. $\forall x, y \in C : x + y \in C \wedge xy \in C$
2. $\forall k \in K : k^2 \in C$
3. Ein Kegel $C \subseteq K$ ist *echt*, falls $-1 \notin C$.
4. Der *positive* Kegel von K ist definiert durch: $C := \{x \in K \mid x \geq 0\}$

Definition 1.3. Sei M eine Menge, $\leq$ eine binäre Relation. $(M, \leq)$ ist eine *totale Ordnung* falls gilt:

1. Transitivität: aus $a \leq b$ und $b \leq c$ folgt $a \leq c$.
2. Reflexivität: $\forall a \in M : a \leq a$
3. Antisymmetrie: aus $a \leq b$ und $b \leq a$ folgt $a = b$
4. Totalität: $\forall a, b \in M : a \leq b \vee b \leq a$.

Bemerkung 1.4.

- Sind aus Definition 1.3 nur die Punkte 1-3 erfüllt, so ist die Ordnung *partiell*.
- Ist die total geordnete Menge $(K, \leq)$ ein Körper, dann gilt zusätzlich:

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq x + z \text{ für alle } z \in K \text{ und } 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy.$$

Lemma 1.5. *Sei K ein reeller Körper, dann existiert eine totale Ordnung $\leq$ auf K.*

Beweis. Es existiert ein echter Kegel $C \subset K$, bestehend aus allen Summen aus Quadraten der Elemente aus K, d.h.

$$C := \bigcup_{n \in \mathbb{N}, k_i \in K} \left\{ \sum_{i=0}^{n} k_i^2 \right\}.$$

C ist echt, da gilt: $-1 \notin C$.

Sei $C_i \subset K$ ein beliebiger echter Kegel. Die $\subseteq$-Relation definiert eine Ordnung für alle echten Kegel C_i. Da $\bigcup_{i=0}^{\infty} C_i$ ein echter Kegel aus K ist, gibt es für jede total geordnete Kette eine obere Schranke. Zorns Lemma liefert damit die Existenz eines maximalen echten Kegels $\tilde{C} \subset K$.

Falls gilt $\tilde{C} \cup -\tilde{C} = K$, mit $-\tilde{C} := \{-c \mid c \in \tilde{C}\}$ dann definiere eine Ordnungsrelation $x \leq y :\iff y - x \in \tilde{C}$. Nach Annahme ist diese Ordnungsrelation total.

Sei $a \in K$ mit $-a \notin \tilde{C}$. Dann definiere $\tilde{C}[a] := \{x + ay \mid x, y \in \tilde{C}\}$. $\tilde{C}[a]$ ist unter Addition trivialerweise abgeschlossen, und alle Quadrate sind ebenfalls in $\tilde{C}[a]$ enthalten. Für die multiplikative Abgeschlossenheit seien $x_1 + ay_1, x_2 + ay_2 \in \tilde{C}[a]$. Dann ist

$$(x_1 + ay_1)(x_2 + ay_2) = (x_1x_2 + a^2y_1y_2 + a(x_1y_2 + x_2y_1)) \in \tilde{C}[a]$$

da gilt: $\tilde{C}$ ist multiplikativ abgeschlossen und enthält alle Quadrate, d.h. $x_1x_2 + a^2y_1y_2 \in \tilde{C}$. Aufgrund der Maximalität von $\tilde{C}$ gilt: $\tilde{C}[a] \subseteq \tilde{C}$ und somit ist $a \in \tilde{C}$. Daraus folgt $\tilde{C} \cup -\tilde{C} = K$ was, wie bereits gezeigt, die Totalität der Ordnung $\leq$ impliziert. □

Definition 1.6. Ein Körper R ist reell abgeschlossen wenn sein positiver Kegel die Menge der Quadrate ist:

$$\{x \in R \mid x \geq 0\} = \{x^2 \mid x \in R\} \tag{1}$$

Satz 1.7. *Ein Körper R ist genau dann reell abgeschlossen wenn $R[i] \cong R[X]/[X^2+1]$ algebraisch abgeschlossen (mit $i := \sqrt{-1}$).*

Beweis. Das Resultat ist mit nicht-trivialen Konzepten der Algebra beweisbar, siehe A.8. [3]. □

Satz 1.8. *Sei R ein reell abgeschlossener Körper, dann gilt: R hat die Zwischenwerteigenschaft, d.h. für ein Polynom P über R mit $P(a)P(b) < 0$ für $a, b \in R$ existiert ein $x \in (a, b)$ mit $P(x) = 0$.*

Beweis. Sei P ein Polynom, $a, b \in R$ mit $a < b$ mit $P(a) < 0$ und $P(b) > 0$. Da $R[i]$ algebraisch abgeschlossen ist, kann man $P[X]$ faktorisieren, wobei alle Faktoren unreduzierbar über R vom Grad 1 oder 2 sind.

Betrachte einen beliebigen Faktor von P vom Grad 2: $X^2+\alpha X+\beta$ unreduzierbar auf R, d.h. nullstellenfrei und damit größer als Null.

$$X^2 + \alpha X + \beta = \left(X + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) \text{ mit } 4\beta > \alpha.$$

Die Vorzeichenänderung muss daher aufgrund eines Faktors vom Grad 1 folgen: $X - \gamma$, wobei $\gamma \in (a, b)$ und damit $P(\gamma) = 0$. □

Korollar 1.9. Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Jedes Polynom über R mit ungeraden Grad hat mindestens eine Nullstelle in R.

Beweis. Sei $P[X]$ ein Polynom mit ungeraden Grad. Aus der Faktorisierung in unreduzierbare Terme mit Grad 1 und 2 folgt, dass mindestens ein Faktor linear ist und damit eine Nullstelle über R produziert. □

Lemma 1.10. *Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $P[X]$ ein Polynom über R, $a, b \in R$ mit $a < b$. Hat $P[X]$ keine Nullstelle auf dem Intervall (a, b) so hat $P[X]$ ein konstantes Vorzeichen auf (a, b).*

Beweis. Per Widerspruch.
Annahme: es existieren $d, e \in (a, b)$ mit $P(d)P(e) < 0$ dann folgt aus der Zwischenwerteigenschaft von R, dass es ein $f \in (\min\{d, e\}, \max\{d, e\})$ gibt, sodass $P(f) = 0$, was der Voraussetzung widerspricht. □

Theorem 1.11 (Rolle)**.** *Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $P[X]$ ein Polynom über R, $a, b \in R$ mit $a < b$ und $P(a) = P(b) = 0$. Dann existiert $c \in (a, b)$ sodass $P'(c) = 0$.*

Beweis. O.b.d.A. sei $P[X] \neq 0$ auf (a, b). Schreibe

$$P[X] = (X - a)^m (X - b)^n Q[X] \text{ für } n, m \geq 1$$

und $Q[X]$ ohne Nullstellen auf (a, b), nach Lemma 1.10 damit mit konstantem Vorzeichen (o.b.d.A positiv) auf (a, b). Die Ableitung von P ist demnach:

$$P'[X] = (X - a)^{m-1}(X - b)^{n-1} Q_1[X]$$

mit

$$Q_1[X] = m(X - b)Q[X] + n(X - a)Q[X] + (X - a)(X - b)Q'[X].$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Q_1(a) &= m(a - b)Q(a) < 0 \\ Q_1(b) &= n(b - a)Q(b) > 0 \end{aligned}$$

und aufgrund der Zwischenwerteigenschaft von R existiert $c \in (a, b)$ sodass gilt: $Q_1(c) = 0$ und damit $P'(c) = 0$. □

Korollar 1.12 (Mittelwertsatz)**.** Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $P[X]$ ein Polynom über R, $a, b \in R$ mit $a < b$ dann existiert $c \in (a, b)$ sodass $\frac{P(b) - P(a)}{b - a} = P'(c)$.

Beweis. Definiere

$$Q[X] := (P(b) - P(a))(X - a) - (b - a)(P[X] - P(a))$$

mit $Q(b) = Q(a) = 0$ nach Definition. Nach dem Satz von Rolle existiert $c \in (a, b)$ mit $Q'(c) = 0$. Da

$$Q'(c) = (P(b) - P(a)) - (b - a)P(c)$$

gilt, folgt die Behauptung. □

Auf den ersten Blick erschließt sich nicht, warum man Sätze wie den Zwischenwertsatz oder den Mittelwertsatz für Polynome beweisen sollte, denn schließlich gelten diese für stetig differenzierbare Funktionen, bewiesen in Analysis I. Hier sprechen wir jedoch stets über beliebige reell abgeschlossene Körper R und nicht in wie in der Analysis I über $\mathbb{R}$.

2 Sturms Theorem

Definition 2.1. Sei $P[X]$ ein Polynom. Die *Sturmfolge* $S(P) = S_0, \dots, S_k$ ist die endliche, rekursive Folge welche beim Ausführen des erweiterten Euklidischen Algorithmus [2] auf $P[X]$ und $P'[X]$ entsteht: $S_0 := P$, $S_1 := P'$, und $S_{i+1} := -\text{Rest}\left(\frac{S_{i-1}}{S_i}\right)$, oder äquivalent

$$S_{i+1} := \text{Quo}\left(\frac{S_{i-1}}{S_i}\right) S_i - S_{i-1} \tag{2}$$

wobei $\text{Rest}\left(\frac{S_{i-1}}{S_i}\right)$ der bei der Polynomdivision entstehende Rest und $\text{Quo}\left(\frac{S_{i-1}}{S_i}\right)$ das Ergebnis der Polynomdivision (ohne Rest) ist. Das letzte Folgenglied $S_k \in R$ ist eine Konstante.

Definition 2.2. Sei $S(P)$ die Sturmfolge eines Polynoms P. Wir bezeichnen die Anzahl der Vorzeichenänderungen der Sturmfolge $S(P) = S_0, \dots S_k$, ausgewertet in a, falls $S_0(a), \dots S_k(a) \neq 0$ mit $V(S(P); a)$.

$$V(S_0, \dots S_k; a) := \begin{cases} V(S_1, \dots S_k; a) + 1 & \text{falls } S_0(a)S_1(a) < 0 \\ V(S_1, \dots S_k; a) & \text{sonst} \end{cases}$$

Desweiteren definiere $V(S(P); a, b) := V(S(P); a) - V(S(P); b)$ für $a < b$.

Bemerkung 2.3. Bei der vorangegangen Definition sind ausdrücklich $a, b \in R \cup \{-\infty, \infty\}$ zugelassen, selbst wenn die Folgenglieder unbeschränkt sein können. In der Anwendung wird dies jedoch nicht notwendig sein, da man über a priori Abschätzungen (mit Hilfe des Grades des Polynoms), den Bereich beschränken kann, in dem alle möglichen Nullstellen auftreten.

Theorem 2.4 (Sturm)**.** *Sei R reell abgeschlossener Körper, $P[X]$ ein Polynom über R, $a, b \in R \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a < b$ und $P(a), P(b) \neq 0$. Dann gilt:*

$$|\{c \in (a, b) \mid P(c) = 0\}| = V(S(P); a, b)$$

oder in Worten: die Anzahl der reellen Nullstellen (Vielfachheit nicht mitgezählt) des Polynoms $P[X]$ auf (a, b) ist gleich der Differenz der Vorzeichenänderungen seiner Sturmfolge ausgewertet an a und b.

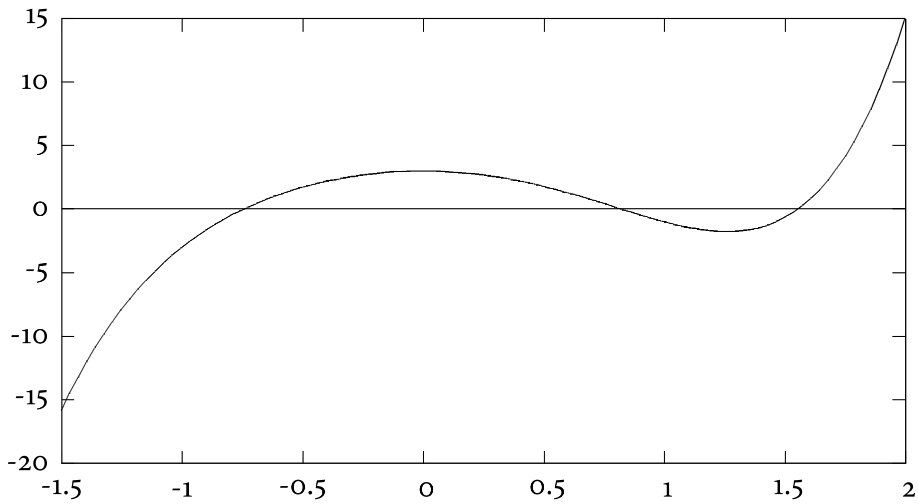
Bevor wir an einem Beispiel demonstrieren, dass Sturms Theorem konstruktiver Natur ist (wobei die Koeffizienten der Sturmfolge durchaus sehr große Ausdrücke in Zähler und Nenner haben können, vgl. Beispiel 2.6 aus [5]), möchten wir kurz bemerken, dass Sturms Theorem einer der wenigen Sätze über Nullstellen ist, bei denen Vielfachheit nicht mitgezählt wird, d.h. dass man eine präzise Aussage über die tatsächliche Anzahl reeller Nullstellen eines Polynoms bekommt.

Beispiel 2.5. Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $P[X] := X^5 - 5X^2 + 3$ ein Polynom über R. Berechnung dessen Sturmfolge $S(P)$:

$$\begin{aligned} S_0[X] &= P[X] = X^5 - 5X^2 + 3 \\ S_1[X] &= P'[X] = 5X^4 - 10X \\ S_2[X] &= 3X^2 - 3 \\ S_3[X] &= 10X - 5 \\ S_4[X] &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Man kann leicht einsehen, dass sich alle Nullstellen von $P[X]$ im Intervall $(-2, 2)$ befinden. $V(S(P); -2) = 3$ $(- + + - +)$ und $V(S(P); 2) = 0$ $(+ + + + +)$ d.h. nach Sturms Theorem hat das Polynom $X^5 - 5X^2 + 3$ drei reelle Nullstellen.

Plot von $x^5 - 5x^2 + 3$



Lemma 2.6. *Sei R ein reell abgeschlossener Körper, $P[X]$ ein Polynom über R mit der Sturmfolge $S(P) = S_0, \ldots S_k$. Falls für $i \in 0, \ldots k-1$ und $c \in R$ gilt: $S_i(c) = S_{i+1}(c) = 0$ dann folgt $S_{i+1}(c) = 0$ und damit per Induktion für alle $j > i$ dass $S_j(c) = 0$.*

Beweis. Die Implikation folgt direkt aus Gleichung (2). Wenn $P(c) = P'(c) = 0$ dann ist c eine mehrfache Nullstelle von $P[X]$. □

Beweis von Sturms Theorem. O.b.d.A seien $a, b \in R$ sodass alle Nullstellen von P im Intervall (a, b) liegen. Dies ist zulässig, denn jedes reelle Polynom hat seine Nullstellen innerhalb eines echten Intervalls über R. Wir lassen den Parameter t von a nach b laufen und wollen zeigen, dass sich $V(S(P); t)$ nur ändert (und zwar um jeweils -1), wenn $P(t) = 0$. Dazu betrachten wir folgende Fallunterscheidung: sei $c \in (a, b)$

1. $P(c) \neq 0$ und $S_i(c) = 0$ für ein $i > 0$: aufgrund von (2) folgt $S_{i-1}(c)S_{i+1}(c) < 0$ und damit existiert für ein $\varepsilon > 0$ so klein dass gilt: S_{i+1}, S_{i-1} haben keine Nullstellen auf $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ und S_i hat genau eine Nullstelle. (Eine solche Wahl von $\varepsilon > 0$ ist immer möglich, da für alle Polynome gilt: die Sturmfolge $S(P)$ hat endlich viele Nullstellen, diese lassen sich trivialerweise isolieren.) Dann hat die Teilfolge S_{i-1}, S_i, S_{i+1} auf $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ genau einen Vorzeichenwechsel, unabhängig vom Vorzeichen von S_i auf diesem Intervall.

2. $P(c) = 0$ und $P'(c) = S_1(c) \neq 0$, d.h. c ist einfache Nullstelle von P: o.b.d.A. sei $P'(c) > 0$. Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ klein genug, sodass P im Intervall $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ nur eine Nullstelle hat und zwar $P(c)$. Es gilt nach Annahme $P'(c) > 0$. Dann ist $P(c-\varepsilon) > 0$ und $P(c+\varepsilon) < 0$ und damit ist $V(S(P); c-\varepsilon) = V(S(P); c-\varepsilon) + 1$.

3. $P(c) = 0 = P'(c)$, d.h. c ist mehrfache Nullstelle von P: sei c eine Nullstelle mit Vielfachheit $m+1$. Dann ist $(t-c)^m$ Teiler von allen S_i, siehe Definition des erweiterten Euklidischen Algorithmus. Definiere

$$S(Q) = Q_0, \dots, Q_k := \frac{S_0}{(t-c)^m}, \dots, \frac{S_k}{(t-c)^m}.$$

   Dann gilt $V(S(Q); t) = V(S(P); t)$ für $t \neq c$ da die Anzahl der Vorzeichenänderungen invariant unter der Multiplikation einer Nullsturmfolge mit einem Skalar (ungleich Null) ist. Da nach Voraussetzung $Q'(c) \neq 0$ gilt, sind nicht alle $Q_i(c) = 0$ und damit folgt aus Fall 1, dass die Teilfolge $Q_1, \dots Q_k$ nicht zur einer Änderung von $V(S(Q); t)$ beitragen.

   Damit bleibt der Beitrag von Q_0 zu untersuchen für t aus einer Umgebung von c: schreibe

$$P(t) = (t-c)^{m+1}H(t) \qquad \text{mit } H(c) \neq 0$$

   und damit

$$P'(t) = (m+1)(t-c)^m H(t) + (t-c)^{m+1}H'(t)$$

   Aus der Definition von Q folgt:

$$Q(t) = (t-c)H(t) \quad \text{und} \quad Q'(t) = (m+1)H(t) + (t-c)H'(t)$$

   Sei o.B.d.A $H(c) > 0$ dann ist $Q'(c) > 0$ und damit folgt analog zu Fall 2 für ein $\varepsilon > 0$ klein genug: $Q(c-\varepsilon) < 0$ und $Q(c+\varepsilon) > 0$.

□

3 Puiseux Reihen

Ein Beispiel für einen nicht-trivialen reell abgeschlossenen Körper sind Puiseux Reihen.

Definition 3.1. Sei K ein Körper, $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ und $a_i \in K$. Dann ist

$$\bar{a} := \sum_{i \geq k} a_i \varepsilon^{\frac{i}{q}}$$

eine Puiseux Reihe mit der Veränderlichen ε. Der Körper der Puiseux Reihen wird mit $K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ bezeichnet.

Eine Puiseux Reihe kann man als Verallgemeinerung der Laurent-Reihe verstehen:

Definition 3.2. Sei K ein Körper, $k \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in K$. Dann ist

$$\bar{a} := \sum_{i \geq k} a_i \varepsilon^{i}$$

eine *formale Laurent Reihe* mit der Veränderlichen ε. Der Körper der Laurent Reihen wird mit $K((\varepsilon))$ bezeichnet.

Die Reihen sind formal, da keine Aussage über deren Konvergenz getroffen wird. Folgende Rechenregeln werden für die Veränderlichen angenommen:

Lemma 3.3. *Seien $\varepsilon^r, r_0, r_1 \in \mathbb{Q}$, dann gilt:*

1. $\varepsilon^{r_1}\varepsilon^{r_2} = \varepsilon^{r_1+r_2}$
2. $\left(\varepsilon^{r_1}\right)^{r_2} = \varepsilon^{r_1 r_2}$
3. $\varepsilon^0 = 1$.

Damit können zwei beliebige Puiseux Reihen addiert und multipliziert werden.

Definition 3.4. Seien $\bar{a}, \bar{b} \in K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ mit

$$\bar{a} := \sum_{i \geq k_1} a_i \varepsilon^{\frac{i}{q_1}} \qquad \bar{b} := \sum_{j \geq k_2} b_j \varepsilon^{\frac{j}{q_2}}$$

Sei $q := \mathrm{kgV}\{q_1, q_2\}$ und $k := \min\{k_1, k_2\}$. Dann definiere:

$$\bar{a} + \bar{b} := \sum_{l \geq k} (a_l + b_l) \varepsilon^{\frac{l}{q}}$$

und

$$\bar{a}\bar{b} := \sum_{n \geq k} \left(\sum_{p+r=n} a_p b_r \right) \varepsilon^{\frac{n}{q}} \quad \text{(Cauchy Produkt)}$$

wobei die Koeffizienten a_l, b_l derart sind, dass $\bar{a}, \bar{b}$ jeweils die ursprüngliche Puiseux Reihe darstellen.

Definition 3.5. Sei $\bar{a} = a_0\varepsilon^{r_0} + a_1\varepsilon^{r_1} + \ldots \in K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ mit $r_0 < r_1 < \ldots$ und $a_0 \neq 0$. Dann definiere den Grad von $\bar{a}$ als $o(\bar{a}) := r_0$. Die Ordnung von 0 wird als ∞ definiert.

Lemma 3.6. *Für die Ordnungsfunktion $o : \langle\langle\varepsilon\rangle\rangle \to \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ gilt:*

1. $o(\bar{a}\bar{b}) = o(\bar{a}) + o(\bar{b})$
2. $o(\bar{a} + \bar{b}) \geq \min\{o(\bar{a}), o(\bar{b})\}$ *mit Gleichheit falls* $o(\bar{a}) \neq o(\bar{b})$.

Definition 3.7. Sei $\bar{a} \in K\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$. $\bar{a}$ ist *positiv*, falls der Koeffizient von $o(\bar{a})$ positiv ist.

Bemerkung 3.8. Die Veränderliche ε ist *infinitesimal* bezüglich R, d.h. für alle $r \in R$ mit $r > 0$ gilt: $r - \varepsilon > 0$. Das heißt, $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ ist ein Körper, der nicht archimedisch geordnet ist, im Gegensatz zu $\mathbb{R}$.

Theorem 3.9. *Sei R ein reell abgeschlossener Körper. Dann ist der Körper $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ reell abgeschlossen.*

Lemma 3.10. *Sei $\bar{a} \in R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ mit $\bar{a}$ positiv. Dann ist $\bar{a} = \bar{b}^2$ für ein $\bar{b} \in R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$.*

Beweis. Sei $\bar{a} := \sum_{i \geq k} a_i \varepsilon^{\frac{i}{q}}$ mit $a_k > 0$. Definiere

$$\bar{b} := \sum_{i \geq k+1} \frac{a_i}{a_k} \varepsilon^{\frac{(i-k)}{q}}.$$

Dann ist $\bar{a} = a_k \varepsilon^{\frac{k}{q}}(1 + \bar{b})$ und $o(\bar{b}) > 0$. Die Quadratwurzel von $(1 + \bar{b})$ wird durch die Taylor Entwicklung von $(1 + \bar{b})^{\frac{1}{2}}$ berechnet:

$$\bar{c} = 1 + \frac{1}{2}\bar{b} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{2} - (n-1)\right)\bar{b}^n + \ldots.$$

Da $a_k > 0$ und R reell abgeschlossen ist, folgt $\sqrt{a_k} \in R$. Damit ist $\sqrt{\bar{a}} = \sqrt{a_k}\varepsilon^{\frac{k}{2q}}\bar{c}$. □

Um Theorem 3.9 zu beweisen, muss noch gezeigt werden dass jedes Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ hat. Dafür kann man das Konzept eines Newtonpolygons eingeführen, jedoch ist der Beweis recht aufwendig, siehe [4]

Bemerkung 3.11. Mithilfe des Konzepts von Transzendenzbasen (siehe 7.1 [1]) kann man zeigen, dass die Körper R und $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ gleichmächtig sind. Aufgrund der Eigenschaft, dass R archimedisch angeordnet werden kann, und $R\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ nicht, folgt nach [6], dass die Körper nicht isomorph sein können.

Literatur

[1] S. Bosch, *Algebra*, Springer, 2009.

[2] S. Lang, *Algebra*, Springer, 2002.

[3] D. Marker, *Model Theory: An Introduction*, Springer, 2003.

[4] M. R. S. Basu, R. Pollack, *Algorithms in Real Algebraic Geometry*, Springer, 2003.

[5] F. Sottile, *Real solutions to equations from geometry*, to be published in AMS, (2010).

[6] M. Venkataramana and T. Soundararajan, *The field structure of the real number system*, vol. 7, Australian Mathematical Society, 1967.