

Einblick in Modallogik

Daniel Geiß

31.03.2011

1 Aussagenlogik

Die Modallogik stellt eine Erweiterung der Logik dar, in der nicht nur über Wahrheit, sondern auch über mögliche und notwendige Wahrheit Aussagen getroffen werden. Hierfür werden meist mehrere alternative „Welten“ betrachtet, die einander „sehen“ im Sinne einer Relation.

Zunächst betrachten wir die Aussagenlogik als Grundlage für die Modallogik mit

Aussagenvariablen $p, q, r, \dots,$
monadischen Operatoren $\neg, \Box,$
diadischem Operator \vee

als primitiven Symbolen und dem Begriff der wohlgeformten Formel, im folgenden abgekürzt durch *wff*, welche aus der korrekten Nutzung dieser Symbole mit entsprechender Klammerung hervorgehen.

Das Symbol \Box ist hierbei die Erweiterung, mit der wir uns in die Modallogik begeben. $\Box p$ ist als „notwendigerweise p “ zu verstehen.

Diese Symbole lassen sich durch Definitionen noch ergänzen für vereinfachte Darstellungen mit

$$p \wedge q := \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$p \rightarrow q := \neg p \vee q$$

$$p = q := (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\Diamond p := \neg \Box \neg p.$$

$\Diamond p$ bedeutet entsprechend „möglicherweise p “ und wird ebenso wie auch \Box als *Modaloperator* bezeichnet.

Definition 1 1. Eine Welt w ist eine Menge von Aussagenvariablen derart, dass für jede Variable p gilt: entweder p oder $\neg p$ ist in w .

2. Ein Rahmen ist ein Tupel (W, R) , wobei W eine nicht-leere Menge von Welten und R eine diadische Relation über den Welten aus W ist.

3. Ein Tripel (W, R, V) heißt Modell von (W, R) , wenn (W, R) ein Rahmen und V eine Evaluationsfunktion mit den folgenden Eigenschaften ist:

(a) Für jede Variable p und alle $w \in W$ gilt entweder $V(p, w) = 1$ oder $V(p, w) = 0$.

(b) Für alle wff α und alle $w \in W$ gilt $V(\neg \alpha, w) = 1$, wenn $V(\alpha, w) = 0$ und $V(\neg \alpha, w) = 0$ sonst.

- (c) Für alle wff α, β und alle $w \in W$ gilt $V(\alpha \vee \beta, w) = 1$, falls $V(\alpha, w) = 1$ oder $V(\beta, w) = 1$, ansonsten $V(\alpha \vee \beta, w) = 0$.
- (d) Für alle wff α und alle $w \in W$ gilt $V(\Box\alpha, w) = 1$, falls für alle $w' \in W$ mit $(w, w') \in R$ $V(\alpha, w') = 1$ gilt, ansonsten gilt $V(\Box\alpha, w) = 0$.
4. Eine wff α heißt allgemeingültig auf (W, R) , falls für jedes auf (W, R) basierende Modell (W, R, V) und für jedes $w \in W$ $V(\alpha, w) = 1$ gilt.
5. Eine modale wff heißt K-gültig, wenn sie auf jedem Rahmen allgemeingültig ist.

Ein Beispiel für eine K-gültige wff bildet $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$, worauf wir im folgenden näher eingehen.

1.1 System K

Das System K setzt sich zusammen aus den Axiomen

PC α allgemeingültige wff der Aussagenlogik (PC), dann α Axiom

K $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$

und den Transformationsregeln

US (Uniform Substitution) einheitliches Ersetzen von Variable durch wff

MP (Modus Ponens) α und $\alpha \rightarrow \beta$ Theoreme, dann β Theorem

N (Necessitation) α Theorem, dann auch $\Box\alpha$ Theorem

Notation:

1. Sei α wff, P_1, \dots, P_n einige oder alle Variablen in α und β_1, \dots, β_n wff, dann bezeichnet $\alpha[\beta_1/p_1, \dots, \beta_n/p_n]$ die US der Variablen p_i durch die wff β_i .
2. Sei α wff und S ein axiomatisches System, dann gilt $\vdash_S \alpha$, falls α Theorem von S ist.
3. Ableitbarkeit einer wff durch eine andere sei symbolisiert durch \Rightarrow .

Damit notieren wir die Transformationsregeln in der folgenden Form:

US (Uniform Substitution) $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \alpha[\beta_1/p_1, \dots, \beta_n/p_n]$

MP (Modus Ponens) $\vdash \alpha$ und $\vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash \beta$

N (Necessitation) $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \Box\alpha$

Bevor wir auf einige der Theoreme von K eingehen, betrachten wir noch 3 Abgeleitete Regeln (Derived Rules), die uns die folgenden Beweise erleichtern.

DR1 $\vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash \Box \alpha \rightarrow \Box \beta$
 Bew: $\alpha \rightarrow \beta$
 $\Box(\alpha \rightarrow \beta)$
 $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box \alpha \rightarrow \Box \beta)$
 $\Box \alpha \rightarrow \Box \beta$

DR2 $\vdash \alpha = \beta \Rightarrow \vdash \Box \alpha = \Box \beta$
 Bew: $\alpha = \beta$
 $\alpha \rightarrow \beta$
 $\Box \alpha \rightarrow \Box \beta$
 $\beta \rightarrow \alpha$
 $\Box \beta \rightarrow \Box \alpha$
 $\Box \alpha = \Box \beta$

DR3 $\vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash \Diamond \alpha \rightarrow \Diamond \beta$
 Bew: $\alpha \rightarrow \beta$
 $\neg \beta \rightarrow \neg \alpha$
 $\Box \neg \beta \rightarrow \Box \neg \alpha$
 $\neg \Box \neg \alpha \rightarrow \neg \Box \neg \beta$
 $\Diamond \alpha \rightarrow \Diamond \beta$

Satz 1.1 *Die folgenden wff sind Theoreme von K:*

- K1 $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
- K2 $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$
- K3 $\Box(p \wedge q) = (\Box p \wedge \Box q)$
- K4 $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$
- K5 $\Box p = \neg \Diamond \neg p$
- K6 $\Diamond(p \vee q) = (\Diamond p \vee \Diamond q)$
- K7 $\Diamond(p \rightarrow q) = (\Box p \rightarrow \Diamond q)$
- K8 $\Diamond(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$
- K9 $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$

Lemma 1.2 *Sei (W, R) ein Rahmen, jede allgemeingültige wff der Aussagenlogik (PC) ist allgemeingültig auf (W, R) , ebenso ist die wff K allgemeingültig auf (W, R) .*

Beweis:

1. *In jedem Modell werden PC wff ohne Bezug zu anderen Welten evaluiert. Insbesondere haben allgemeingültige PC wff Wert 1 für jede Belegung, also für jedes Modell in jedem Rahmen.*

2. Angenommen wff K wäre nicht allgemeingültig: Dann existiert ein Modell (W, R, V) und ein $w \in W$ mit $V(K, w) = 0$, also mit

(a) $V(\Box(p \rightarrow q), w) = 1$,

(b) $V(\Box p, w) = 1$ und

(c) $V(\Box q, w) = 0$.

Nach (c) existiert ein $w' \in W$ mit $(w, w') \in R$ und $V(q, w') = 0$, mit (b) folgt $V(p, w') = 0$ Widerspruch zu (a).

Lemma 1.3 Sei (W, R) ein beliebiger Rahmen, es gilt:

1. Falls α allgemeingültig auf (W, R) ist, dann auch $\alpha[\beta_1/p_1, \dots, \beta_n/p_n]$ für beliebige wff $\beta_i, i = 1, \dots, n$.
2. Falls α und $\alpha \rightarrow \beta$ allgemeingültig auf (W, R) sind, dann auch β .
3. Falls α allgemeingültig auf (W, R) ist, dann auch $\Box\alpha$.

Beweis:

1. Sei (W, R) Rahmen. Angenommen $\alpha[\beta_1/p_1, \dots, \beta_n/p_n]$ ist nicht allgemeingültig auf (W, R) . Dann existiert ein Modell (W, R, V) , so dass für ein $w^* \in W$ $V(\alpha[\beta_1/p_1, \dots, \beta_n/p_n], w^*) = 0$ gilt. Sei (W, R, V^*) ein Modell auf demselben Rahmen, wobei V^* wie V mit dem Unterschied, dass für alle $w \in W$ und $1 \leq i \leq n$ $V^*(\beta_i, w) = V(\beta_i, w)$. Dann $V^*(\alpha, w^*) = 0$, α nicht allgemeingültig.
2. klar
3. klar

Theorem 1.4 Sei A eine beliebige Menge modaler wff und (W, R) ein Rahmen, auf dem jede wff aus A allgemeingültig ist.

Dann ist jedes Theorem von $K + A$ allgemeingültig auf (W, R) .

Beweis: Folgt aus Lemmata 1.2/1.3

Theorem 1.5 Jedes Theorem von K ist K -gültig.

1.2 System T und S4

Betrachten wir das System T, welches sich aus dem System K ergänzt um das Axiom T ergibt und zwei der darauf basierenden Theoreme T1 und T2:

$$T \quad \Box p \rightarrow p$$

$$T1 \quad p \rightarrow \Diamond p$$

$$T2 \quad \Diamond(p \rightarrow \Box p)$$

$$\text{Bew: } \Box p \rightarrow \Diamond \Box p$$

$$\Diamond(p \rightarrow \Box p) = (\Box p \rightarrow \Diamond \Box p)$$

$$\Diamond(p \rightarrow \Box p)$$

Bemerkung 1.6 1. Das Axiom T ist allgemeingültig auf jedem Rahmen (W, R) , in dem R reflexiv ist.

2. Tatsächlich ist das System nicht nur korrekt (siehe Theorem 1.4) sondern auch vollständig. Der Beweis hierfür ist allerdings zu umfangreich.

Betrachten wir nun im Sinne von Axiom T sogenannte Reduktionsgesetze:

$$R1 \quad \Diamond p = \Box \Diamond p$$

$$R2 \quad \Box p = \Diamond \Box p$$

$$R3 \quad \Diamond p = \Diamond \Diamond p$$

$$R4 \quad \Box p = \Box \Box p$$

Aus jeder Gleichung ist jeweils eine der Richtungen bereits ein Theorem von T, wir betrachten also insbesondere die nicht in T enthaltenen Richtungen:

$$R1a \quad \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$$

$$R2a \quad \Diamond \Box p \rightarrow \Box p$$

$$R3a \quad \Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$$

$$R4a \quad \Box p \rightarrow \Box \Box p$$

Und stellen folgende Zusammenhänge fest

Bemerkung 1.7 • $R4a \Leftrightarrow R3a$

- $R1a \Leftrightarrow R2a$

- $R1a \Rightarrow R4a$, aber nicht $R4a \Rightarrow R1a$

- $R1a, \dots, R4a$ sind nicht in T enthalten und $T+R1a, \dots, T+R4a$ sind strikt stärkere Systeme als T.

Definition 2 Das System $T + R4a$ heißt S4. Das System $T + R1a$ heißt S5.

Satz 1.8 *Die folgenden wff sind Theoreme von S4:*

- 4 $\Box p \rightarrow \Box \Box p$
- S4(1) $\Diamond \Diamond p \rightarrow \Diamond p$
- S4(2) $\Box p = \Box \Box p$
- S4(3) $\Diamond \Diamond p = \Diamond p$
- S4(4) $\Diamond \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond p$
- S4(5) $\Box \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond \Box \Diamond p$
- S4(6) $\Box \Diamond p = \Box \Diamond \Box \Diamond p$
- S4(7) $\Diamond \Box p = \Diamond \Box \Diamond \Box p$

Bemerkung 1.9 1. *Alle Modalitäten in S4 lassen sich auf eine der folgenden Formen oder deren Negation reduzieren: $\neg, \Box, \Diamond, \Box \Diamond, \Diamond \Box, \Box \Diamond \Box, \Diamond \Box \Diamond$, wobei \neg hier für das Fehlen jeglicher Modaloperatoren steht.*

2. *Das System S4 lässt sich Charakterisieren durch die Klasse aller Rahmen (W, R) , in denen R reflexiv und transitiv ist. Bezüglich dieser Charakterisierung lässt sich Korrektheit und Vollständigkeit zeigen.*

1.3 System S5

Satz 1.10 *Für das System S5 mit Axiom E sind die folgenden wff Theoreme von S5:*

- E $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
- S5(1) $\Diamond \Box p \rightarrow \Box p$
- S5(2) $\Diamond p = \Box \Diamond p$
- S5(3) $\Box p = \Diamond \Box p$
- 4 $\Box p \rightarrow \Box \Box p$
- S5(4) $\Box(p \vee \Box q) = (\Box p \vee \Box q)$
- S5(5) $\Box(p \vee \Diamond q) = (\Box p \vee \Diamond q)$
- S5(6) $\Diamond(p \wedge \Diamond q) = (\Diamond p \wedge \Diamond q)$
- S5(7) $\Diamond(p \wedge \Box q) = (\Diamond p \wedge \Box q)$

Bemerkung 1.11 1. *Alle Modalitäten in S5 lassen sich auf eine der folgenden Formen oder deren Negation reduzieren: \neg, \Box, \Diamond , wobei \neg hier für das Fehlen jeglicher Modaloperatoren steht.*

2. *Das Axiom E ist allgemeingültig auf jedem Rahmen (W, R) , in dem R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.*

3. Das System S5 lässt sich Charakterisieren durch die Klasse aller Rahmen (W, R) , in denen R eine Äquivalenzrelation. Bezüglich dieser Charakterisierung lässt sich Korrektheit und Vollständigkeit zeigen.

Definition 3 S5-Gültigkeit sei definiert als Allgemeingültigkeit auf jedem Äquivalenzrahmen (W, R) mit R reflexiv, transitiv und symmetrisch.

2 Logik erster Stufe

Betrachten wir zunächst Logik erster Stufe (LPC) ohne Modaloperater. Die Sprache \mathcal{L} besteht dann aus den primitiven Symbolen

- | | | |
|-----|--|-----------------------------|
| (1) | abzählbar viele Prädikate | ϕ, ψ, χ, \dots |
| (2) | abzählbar unendlich viele individuelle Variablen | x, y, z, \dots |
| (3) | monadische/diadische Opreatoren (und Klammern) | $\neg, \forall, \vee, (,)$ |

Und den folgenden Formationsregeln

- FR1 Jede Sequenz aus n-stelligem Prädikat gefolgt von n Variablen ist wff
 FR2 α ist wff, dann auch $\neg\alpha$
 FR3 α, β wff, dann auch $(\alpha \vee \beta)$
 FR4 α wff, x individuelle Variable, dann $\forall x\alpha$ wff

Diese werden wieder ergänzt um \wedge, \rightarrow und $=$ wie vorher, sowie um den Existenzoperator \exists mit $\exists x\alpha := \neg\forall x\neg\alpha$.

Definition 4 1. Eine Variable x heißt frei in einer wff α , wenn sie nicht im Geltungsbereich eines Quantoren liegt, und anderenfalls gebunden.

2. Eine wff ohne freie Variablen heißt Aussage.

3. Ein Modell hat die Form (D, V) mit D als Definitionsbereich

Nun betrachten wir die Evaluationsfunktion V genauer. Die zu Grunde liegende Idee ist, dass $\phi(u_1, \dots, u_n)$ wahr ist, falls $(u_1, \dots, u_n) \in V(\phi)$ gilt. Damit das aber auch für freie Variablen funktioniert, definieren wir uns zunächst eine Funktion μ , die alle Variablen auf D abbildet. Solche Funktionen bezeichnen wir als Wertzuweisungen. $V_\mu(\alpha) = 1$ heißt dann: α ist wahr in (D, V) , wenn die Variablen die von μ zugewiesenen Werte annehmen.

Die Evaluationsfunktion V wird nun folgendermaßen charakterisiert:

- | | |
|----------------|---|
| [$V\phi$] | $V_\mu(\phi(x_1, \dots, x_n)) = 1$, wenn $(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)) \in V(\phi)$, und sonst = 0 |
| [$V\neg$] | analog zur Aussagenlogik |
| [$V\vee$] | analog zur Aussagenlogik |
| [$V\forall$] | $V_\mu(\forall x\alpha) = 1$, falls $V_\rho(\alpha) = 1$ für alle x-Alternativen ρ von μ |

Eine Wertzuweisung ρ heißt *x-Alternative* zu μ , falls für alle Variablen y außer x gilt $\rho(y) = \mu(y)$.

Definition 5 1. Eine wff α heißt allgemeingültig in (D, V) , falls $V_\mu(\alpha) = 1$ für alle Wertzuweisungen μ .

2. Eine wff α heißt allgemeingültig, falls sie in allen Modellen allgemeingültig ist.

Als nächstes Betrachten wir das Prinzip des Ersatzes (Principle of Replacement) und der Einigung (Principle of Agreement)

$\forall 1 \quad \forall x \alpha \rightarrow \alpha[y/x]$

wobei $\alpha[y/x]$ für α mit freiem y statt jedem freien x steht.

PR α wff, x, y Variablen, (D, V) Modell, μ Wertzuweisung.

Dann ρ wie μ aber $\rho(x) = \mu(y)$, $V_\rho(\alpha) = V_\mu(\alpha[y/x])$

PA $\rho(x) = \mu(x)$ für alle Variablen x , dann $V_\rho(\alpha) = V_\mu(\alpha)$

2.1 Axiomatisierung

In diesem Abschnitt werden wir uns noch ein System der Logik erster Stufe (LPC) axiomatisieren, so dass wir daraufhin mit Modaloperatoren darauf aufbauen können. Es bleibt zu bemerken, dass wir hierfür nicht auf das Prinzip des Einheitlichen Ersetzens zurückgreifen können.

Definition 6 Als LPC Substitutions-Instanz einer PC wff α bezeichnen wir das Resultat von einheitlichem Ersetzen jeder Aussagenvariable in α durch eine wff in \mathcal{L} .

Axiome:

PC jede LPC Substitutions-Instanz einer allgemeingültigen PC wff ist ein Axiom

$\forall 1$ Wenn α wff, x, y Variablen, dann ist $\forall x \alpha \rightarrow \alpha[y/x]$ ein Axiom

Transformationsregeln:

MP $\vdash \alpha, \vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash \beta$

$\forall 2$ $\vdash \alpha \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash \alpha \rightarrow \forall x \beta$

Theoreme:

$UG \quad \vdash \Rightarrow \vdash \forall x \alpha$

$UG^{\rightarrow} \quad \vdash \rightarrow \beta \Rightarrow \vdash \forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta$

$UG^= \quad \vdash \alpha = \beta \Rightarrow \vdash \forall x \alpha = \forall x \beta$

$Eq \quad$ Falls $\vdash \alpha = \beta$ und $\gamma[\alpha]$ wie $\gamma[\beta]$ aber α wo sonst β , dann $\vdash \gamma[\alpha] = \gamma[\beta]$

$RBV \quad \forall x \alpha = \forall y \beta$, falls α wie β aber mit freiem x , wo sonst freies y

$LPC1 \quad \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow (\forall x \alpha \rightarrow \forall x \beta)$

$LPC2 \quad \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x \beta)$, wobei x nicht frei in α

$LPC3 \quad \exists y(\alpha[y/x] \rightarrow \forall x \alpha)$, wobei y nicht frei in $\forall x \alpha$

$QI \quad \neg \exists x \neg \alpha = \forall x \alpha$

2.2 Modale Logik erster Stufe

Für die Modallogik in diesem Grundgerüst ergänzen wir den Modaloperator \Box und den dadurch definierten Operator \Diamond und ergänzen die Formationsregel FR2:

$FR2' \quad \alpha$ wff, dann auch $\neg \alpha$ und $\Box \alpha$

Das Wiedereinführen der Rahmen hat folgende Auswirkungen auf die Modelle. Modelle sind nunmehr von der Form (W, R, D, V) und für ein n -stelliges Prädikat ϕ betrachtet $(n+1)$ -Tupel (u_1, \dots, u_n, w) . $V(\phi)$ ist also eine Menge von $(n+1)$ -Tupeln (u_1, \dots, u_n, w) mit $u_i \in D$ und $w \in W$ mit den Eigenschaften:

$[V\phi] \quad V_\mu(\phi(x_1, \dots, x_n, w)) = 1$, wenn $(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n), w) \in V(\phi)$, und sonst $= 0$

$[V\neg] \quad V_\mu(\neg \alpha, w) = 1$, falls $V_\mu(\alpha, w) = 0$ und sonst 0

$[V\vee] \quad$ analog

$[V\forall] \quad$ analog und

$[V\Box] \quad V_\mu(\Box \alpha, w) = 1$, falls $V_\mu(\alpha, w') = 1$ für alle $w' \in W$ mit $(w, w') \in R$

Definition 7 Sei S ein System der modalen Aussagenlogik, dann ist $LPC+S$ gegeben durch: Axiome:

$S' \quad$ Sei α LPC Subst.-Instanz von Theorem aus S , dann ist α Axiom von $LPC + S$

$\forall 1 \quad$ Wenn α wff, x, y Variablen, dann ist $\forall x \alpha \rightarrow \alpha[y/x]$ ein Axiom

Formationsregeln:

$N \quad \alpha$ Theorem von $LPC + S$, dann auch $\Box \alpha$

$MP \quad \alpha$ und $\alpha \rightarrow \beta$ sind Theoreme, dann auch β

$\forall 2 \quad \alpha \rightarrow \beta$ Theorem, x nicht frei in α , dann ist auch $\alpha \rightarrow \forall x \beta$ Theorem

und

$BF \quad \forall x \Box \alpha \rightarrow \Box \forall x \alpha$ (Barcan Formel)

Bemerkung 2.1 1. $S + BF$ ist $LPC + S$ mit BF

2. *Die Umkehrrichtung der Barcan Formel ist ein Theorem*
3. *(W, R) ist genau dann ein Rahmen für S , wenn (W, R) ein Rahmen für $S + BF$ ist.*
 $S5+BF$ beispielweise lässt sich also immernoch durch Äquivalenzrahmen Charakterisieren.