Diskrete Optimierung
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

SoSe 2011
14./17.06.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Modellierung: Lambda-Methode)
Tritt in den Nebenbedingungen oder der Zielfunktion eines Optimierungsproblems eine stetige (nichtlineare) Funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ auf, so kann diese durch einen linearen Spline approximiert werden. Dieser wiederum kann durch ein MIP modelliert werden.
Sei $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ein linearer Spline, das heißt eine stetige stückweise lineare Funktion, die durch die Punkte $(c_1, f_1), \ldots, (c_n, f_n)$ mit $a = c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$ gegeben ist. Für $x \in [c_i, c_{i+1}]$ $(i \in \{1, \ldots, n-1\})$ gilt dann $f(x) = f_i + (x - c_i)\frac{f_{i+1} - f_i}{c_{i+1} - c_i}$.
Seien $x \in [a,b]$ und $y \in \mathbf{R}$ Variablen. Um die Bedingung $y = f(x)$ durch lineare Nebenbedingungen zu modellieren kann die *convex combination* oder *lambda method* benutzt werden:
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ Variablen. Dann leisten die Bedingungen

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= 1 \\ y &= \sum_{i=1}^{n} f_i \lambda_i \\ 0 &\le \lambda_i \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

das Gewünschte, sofern die *Special Ordered Set of Type 2 condition* oder kürzer *SOS 2 condition* gilt: Höchstens zwei der λ-Variablen sind positiv und für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\lambda_i > 0 \wedge \lambda_j > 0 \quad \Rightarrow \quad i = j \vee i = j+1 \vee i = j-1$$

Formuliere die SOS 2 condition mit Hilfe von linearen (Un)gleichungen (und zusätzlichen Variablen).

Aufgabe G2 (Lagrange-Relaxierung)
Betrachten das Problem (3.15) aus dem Skript:

$$\begin{array}{lrcl} \min & c^T x & & \\ \text{s.t.} & A_1 x & \le & b_1 \\ & A_2 x & \le & b_2 \\ & x & \in & \mathbb{Z}^{n-p} \times \mathbf{R}^p \end{array}$$

und für $\lambda \ge 0$

$$L(\lambda) = \min_{x \in P^2} c^T x - \lambda^T (b_1 - A_1 x),$$

wobei $P^2 = \{x \in \mathbb{Z}^{n-p} \times \mathbf{R}^p \mid A_2 x \le b_2\}$. Beweise folgende Aussage:
Falls x_λ Optimallösung von $L(\lambda)$ ist mit

(a) $A_1 x_\lambda \le b_1$

(b) $(A_1 x_\lambda)_i = (b_1)_i$, falls $\lambda_i > 0$,

dann ist x_λ Optimallösung von (3.15).

Aufgabe G3 (Lagrange-Relaxierung)
Betrachte das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{lccc} \min & c^T x & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b. \end{array}$$

Zeige, dass die Lagrange-Relaxierung (siehe Formel (3.17) im Skript) von dem obigen LP, bei der *alle* Nebenbedingungen relaxiert werden, gerade das aus der Einführung in die Optimierung bekannte duale LP ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Cliquenungleichungen)
Beweise Satz 3.29 aus dem Skript:
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $(C, E(C))$ eine Clique in G.
Die Ungleichung

$$\sum_{i \in C} x_i \leq 1$$

ist gültig für das Stabile-Mengen-Polytop $P(G)$. Sie definiert eine Facette von $P(G)$ genau dann, wenn $(C, E(C))$ maximal bezüglich Knoteninklusion ist.

Aufgabe H2 (Lagrange-Funktion und Subgradientenmethode)
Gegeben sei das folgende ganzzahlige Optimierungsproblem (P):

$$\begin{array}{lrcl} \min & 4 - 2x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, x_2 & \in & \{0, 1\}. \end{array}$$

(a) Gib die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung von (P) an, wobei die Nebenbedingung $3x_1 + 4x_2 \leq 6$ relaxiert werden soll.

(b) Skizziere $L(\lambda)$, und berechne das Subdifferential von L:

$$\partial L(\lambda) := \{g \in \mathbf{R} \mid g \text{ ist ein Subgradient an der Stelle } \lambda\}$$

(c) Führe fünf Schritte der Subgradientenmethode aus, um das Maximum von L zu approximieren. Verwende als Subgradienten den in Satz 3.37 angegebenen, wähle als Schrittweite $\mu_k = \frac{1}{k+2}$ und starte mit $\lambda_0 = 0$.

(d) Ermittel die Optimallösung von (P), und vergleiche den Zielfunktionswert mit dem Optimalwert der Lagrange-Relaxierung.