Diskrete Optimierung
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

SoSe 2011
24./27.05.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Projektion und Fourier Motzkin Elimination)
Wir betrachten mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $a, b \in \mathbb{R}^m$ das folgende Polyeder:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \mid Ax + ay \leq b\}$$

sowie die orthogonale Projektion P_H von P auf

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \mid y = 0\}.$$

Ferner sei

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R} \mid u^T Ax \leq u^T b \quad \forall u \in C, y = 0\}$$

mit

$$C = \{u \in \mathbb{R}^m_+ \mid u^T a = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass $P_H = Q$.

Aufgabe G2 (Totale Duale Integralität)
Gegeben seien die Ungleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.
Begründe, warum diese beiden Systeme dasselbe Polyeder definieren.
Sind die Systeme jeweils TDI?

Aufgabe G3 (Graphen und ungerade Kreise)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und C ein ungerader Kreis in G. Betrachte das lineare Programm

$$\max\{c^{\mathrm{T}}x \mid 0 \leq x,\ x_i + x_j \leq 1\ \forall \{i, j\} \in E\}$$

mit $c = \chi^{V(C)}$.
Zeigen Sie:

a) $x_i^* = \frac{1}{2}$ für alle Knoten $i \in V(C)$, $x_i^* = 0$ für $i \notin V(C)$ löst das lineare Programm.

b) x^* ist keine Konvexkombination von Inzidenzvektoren von stabilen Mengen in G.

Hausübung

Aufgabe H1 (Ganzzahlige Polyeder)
Sei A eine ganzzahlige $m \times n$-Matrix und b ein ganzzahliger Vektor.
Zeigen Sie:
Das Polyeder $P = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ ist ganzzahlig genau dann, wenn das Polyeder $\tilde{P} = \{((x,z)^{\mathrm{T}} \mid [A\,I](x,z)^{\mathrm{T}} = b,\ x,z \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Aufgabe H2 (TDI-Beschreibung von Polyedern)
Gegeben sei das Polyeder

$$P = \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimme ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit A und b ganzzahlig, welches TDI ist, so dass $P = \{x \mid Ax \leq b\}$.
Ist das System eine minimale Beschreibung von P?
Tipp: Verfahre wie im Beweis von Satz 2.37.