Diskrete Optimierung
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

SoSe 2011
17./20.05.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Polare Kegel)
Zeige folgendes Lemma aus der Vorlesung:
Für $S, S_i \subset \mathbb{K}^n$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ gilt:

(a) $S_1 \subset S_2 \quad \Rightarrow \quad S_2^\circ \subset S_1^\circ$.

(b) $S \subset S^{\circ\circ}$.

(c) $\left(\bigcup_{i=1}^{k} S_i \right)^\circ = \bigcap_{i=1}^{k} S_i^\circ$.

(d) $S^\circ = \text{cone}(S^\circ) = (\text{cone}(S))^\circ$.

Aufgabe G2 (Total unimodular)
Sei A die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines gerichteten Graphen $G(V, E)$, d. h. $A = (a_{ij})_{i \in V, j \in E}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j \in \delta^+(i), \\ -1, & \text{falls } j \in \delta^-(i), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\delta^+(i) := \{(u, v) \in E \mid u = i\}$ die Menge der Bögen ist, deren Anfangsknoten i ist und $\delta^-(i) := \{(u, v) \in E \mid v = i\}$ die Menge der Bögen, deren Endknoten i ist. Zeige, dass A total unimodular ist.

Aufgabe G3 (Ganzzahlige Polyeder)
Sei $a \in \mathbb{Z}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $P_I := \text{conv}(\{x \in \mathbb{Z}^n \mid a^T x \leq \alpha\})$. Weiter sei $k = \gcd(a_1, \ldots, a_n)$ der größte gemeinsame Teiler der Komponenten von a.
Zeige mit Hilfe des ganzzahligen Analogon des Farkas-Lemma (Satz 2.27), dass

$$P_I = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{k} x_i \leq \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die folgenden beiden Mengen:

$$Q := \{x \in \mathbf{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\} \qquad \text{und}$$
$$R := \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \frac{1}{k} a^T x \leq \left\lfloor \frac{\alpha}{k} \right\rfloor \right\}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Ganzzahlige Polyeder)
Gegeben sei das Polyeder $P \subset \mathbf{R}^2$ durch

$$\begin{aligned} -10x_1 - 6x_2 &\leq -15 \\ 2x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\ 6x_1 - 4x_2 &\leq 9. \end{aligned}$$

(a) Skizziere P in der Ebene, und markiere alle ganzzahligen Punkte, die in P enthalten sind. Wähle einen nicht zu kleinen Maßstab (Empfehlung: 3 cm pro Längeneinheit).

(b) Bestimme zeichnerisch $P_{I,1}$ und $P_{I,2} (= P_I)$.

(c) Gib jeweils eine Menge von Ungleichungen an, welche $P_{I,1}$ und $P_{I,2}$ beschreiben.

Aufgabe H2 (Ganzzahlige Polyeder)
Beweise Bemerkung 2.12 aus dem Skript:
Sei P ein rationales Polyeder. Dann sind äquivalent:

(a) $P = P_I$

(b) Jede Seitenfläche von P enthält einen ganzzahligen Punkt.

(c) Jede minimale Seitenfläche von P enthält einen ganzzahligen Punkt.

(d) $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ wird von einem ganzzahligen Punkt angenommen für alle $c \in \mathbf{R}^n$, für die das Maximum endlich ist.

Aufgabe H3 (Unimodular und total unimodular)
Beweise Beobachtung 2.14 aus dem Skript:
Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

(a) A ist genau dann total unimodular, wenn $\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}$ unimodular ist.

(b) A ist genau dann total unimodular, wenn $\begin{pmatrix} A \\ -A \\ I \\ -I \end{pmatrix}$ total unimodular ist.

(c) A ist genau dann total unimodular, wenn A^T total unimodular ist.