Diskrete Optimierung
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

SoSe 2011
03./06.05.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Darstellungen von Polyedern)
Gegeben sei das Polyeder P durch die innere Beschreibung:

$$P = \operatorname{conv}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}\right) + \operatorname{cone}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

(a) Ermitteln Sie *zeichnerisch* eine äußere Beschreibung von P.

(b) Geben Sie ein Verfahren an, mit dem man mittels Fourier-Motzkin-Elimination *rechnerisch* die äußere Beschreibung von P erhält.

Aufgabe G2 (Modellierung)
Modellieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ jeweils als zulässigen Bereich eines gemischt-ganzzahligen linearen Programms:

a) $M_1 = \{(1,1), (2,3), (3,1), (4,2)\}$

b) $M_2 = ([0,1] \times \{1\}) \cup ([1,2] \times \{3\}) \cup ([2,3] \times \{2\}) \cup ([3,4] \times \{3\})$

c) $M_3 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x_1 \leq 3,\ |x_1| \leq x_2 \leq |x_1| + 1\right\}$

Aufgabe G3 (Das Knapsack-Polytop)
Gegeben sei die Knapsack-Ungleichung $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$.
Wir betrachten die beiden Polytope

$$P := \operatorname{conv}\left\{x \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b\right\} \quad \text{und}$$

$$S := \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^n \mid x \text{ ist eine Lösung des gegebenen Rucksackproblems}\}.$$

(a) Zeige: $S \subset P$.

(b) Gilt auch $P \subset S$?

Hausübung

Aufgabe H1 (Unbeschränktheit von LPs)
Beweisen Sie folgenden Satz:
Seien $P \subseteq \mathbb{K}^n$ ein Polyeder und $c \in \mathbb{K}^n$. Das lineare Programm $\max\{c^T x \mid x \in P\}$ ist genau dann unbeschränkt, wenn es eine Extremale ϵ von P gibt mit $c^T \epsilon > 0$.

Aufgabe H2 (Spezialfall des Satzes von Minkowski)
Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei $P = P(A, b) = \text{conv}(V) + \text{cone}(E)$ ein nichtleeres Polyeder. Dann gilt

$$P(A, 0) = \text{cone}(E).$$