Diskrete Optimierung
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

SoSe 2011
26./29.04.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Satz von Weyl)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen des Satzes von Weyl: Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sind

(a) $\text{lin}(A) = \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \in \mathbb{K}^n : x = Ay\}$,

(b) $\text{aff}(A) = \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \in \mathbb{K}^n : x = Ay,\ y^T\mathbb{1} = 1\}$,

(c) $\text{conv}(A) = \{x \in \mathbb{K}^m \mid \exists y \in \mathbb{K}^n : x = Ay,\ y^T\mathbb{1} = 1,\ \text{y} \geq 0\}$

Polyeder.

Aufgabe G2 (Projektionen von Polyedern)
Gegeben sei das Polyeder $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 6\} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit dem Projektionsalgorithmus die Projektion von P auf H entlang c.

Aufgabe G3 (Modellierung)
Gegeben sei ein Polyeder $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{K}^n$. Eine *Kugel* mit Radius r und Mittelpunkt z ist definiert durch $B_{z,r} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid ||x - z||_2 \leq r\}$.
Wir möchten eine Kugel mit größtmöglichem Radius finden, welche ganz in P enthalten ist. Formulieren Sie ein lineares Programm zu diesem Problem.

Hausübung

Aufgabe H1 (Fourier-Motzkin-Elimination) (9 Punkte)

a) Geben Sie ein Verfahren an, welches unter Verwendung der FME lineare Programme der Form $\max\{c^{\mathrm{T}}x \mid Ax \leq b\}$ löst.

b) Benutzen Sie das in a) beschriebene Verfahren zur Lösung des unten angegebenen linearen Programms. Wählen Sie eine möglichst geschickte Eliminationsreihenfolge.

$$\begin{array}{lrrrcr}
\max & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & & \\
\text{s. t.} & 3x_1 & +x_2 & -2x_3 & \leq & 0 \\
 & x_1 & -2x_2 & -4x_3 & \leq & -14 \\
 & -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & \leq & -8 \\
 & -x_1 & +x_2 & +4x_3 & \leq & 14
\end{array}$$

Aufgabe H2 (Modellierung) (6 Punkte)

Ein Papierfabrikant stellt Papierrollen mit einer Standardbreite von 105 cm und einer Standardlänge L her. Die Kunden verlangen jedoch Rollen mit geringerer Breite (aber derselben Länge L). Folgende Aufträge liegen vor:

Auftrag	Anzahl der Rollen	Breite der Rollen (cm)
A	100	25
B	125	30
C	80	35

Zur Erledigung der Aufträge werden Standardrollen zerschnitten. Zum Beispiel können aus einer Standardrolle zwei Rollen von je 35 cm Breite und eine Rolle von 30 cm Breite geschnitten werden. Das ergibt einen Schnittverlust von 5 cm. Ziel des Fabrikanten ist die Minimierung der Schnittverluste für die vorliegenden Aufträge.
Modelliere dies als Optimierungsproblem.