

Diskrete Optimierung

13. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

SoSe 2011
12./15.07.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Branch & Bound)
Das binäre Programm

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^n \delta_k \\ \text{s.t.} \quad & x_{ik} + x_{jk} \leq \delta_k \quad \text{für alle } \{i, j\} \in E \text{ und } k \in \{1, \dots, n\} \\ & \sum_{k=1}^n x_{ik} = 1 \quad \text{für alle } i \in V \\ & x \in \{0, 1\}^{n \times n} \\ & \delta \in \{0, 1\}^n \end{aligned}$$

liefert die Färbungszahl des Graphen $G = (V, E)$. Eine *zulässige Färbung* eines Graphen ist eine Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass je zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, unterschiedliche Farben zugeordnet werden, das heißt, dass für alle Kanten $\{i, j\} \in E$ die Bedingung $f(i) \neq f(j)$ erfüllt ist. Die *Färbungszahl* ist die kleinstmögliche Anzahl von Farben, für die es eine zulässige Färbung gibt.

Warum ist diese Formulierung ungünstig um mit dem Branch & Bound-Verfahren gelöst zu werden?

Tipp: Welche Auswirkungen hat die Symmetrie des Problems auf den Branch & Bound-Baum?

Aufgabe G2 (Dynamische Programmierung)
Betrachte das ganzzahlige Rucksackproblem

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & a^T x \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

mit $a_j \in \mathbb{Z}_+$ und $b \in \mathbb{Z}_+$ für $j = 1, \dots, n$.

Bestimme ein zugehöriges Dynamisches Programm und die im entsprechenden DP-Algorithmus zu benutzende rekursiv definierte Funktion J .

Aufgabe G3 (Modellierung)

Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ sowie $l, u \in \mathbb{R}^n$. Formuliere das folgende Problem als gemischt-ganzzahliges Programm:

Maximiere $c^T x$ unter der Bedingung, dass mindestens k der Ungleichungen $A_i x \leq b_i$ ($1 \leq i \leq m$) erfüllt sind, wobei $l \leq x \leq u$ gilt.

Aufgabe G4 (Branch & Bound)

(5 Punkte)

Löse folgendes Optimierungsproblem mittels Branch & Bound und skizziere den Branch & Bound-Baum. Zur Lösung der jeweils auftretenden LP-Relaxierungen darf ein LP-Solver benutzt werden.

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 7x_1 - 2x_2 \leq 14 \\ & x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$