Diskrete Optimierung
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

SoSe 2011
05./08.07.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Greedy-Algorithmus)
Für das Problem, gegebene Geldbeträge mit möglichst wenigen Münzen und Scheinen auszuzahlen, wird der Greedy-Algorithmus angewendet, der für den jeweiligen Restbetrag immer die größtmögliche Münze bzw. den größtmöglichen Schein auszahlt und dann iteriert.

(a) Zeige, dass der Greedy-Algorithmus für das Euro/Cent-System die Optimallösung liefert.

(b) Gilt dies immer noch, wenn zusätzlich 30-Cent-Münzen bzw. 40-Cent-Münzen eingeführt würden?

Tipp: Sei $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ ein Münzsystem mit $a_i \in \mathbb{N}$, $a_1 = 1$, $a_i < a_{i+1}$, und bezeichne $G(x)$ die Lösung, die der Greedy-Algorithmus für einen Betrag $x \in \mathbb{N}$ liefert. Eine Münze a_j hat die *Greedy-Eigenschaft*, falls für alle Folgen $(b_1, \ldots, b_r)$ mit $b_k \in \{a_1, \ldots, a_{j-1}\}$ für $k = 1, \ldots, r$ und $r \geq 2$ sowie o.B.d.A. $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_r$ mit

$$\sum_{i=1}^{r} b_i > a_j \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{r-1} b_i < a_j$$

gilt:

$$G\left(\sum_{i=1}^{r} b_i\right) \leq r.$$

Zeige und benutze die folgende Aussage:
G liefert die Optimallösung genau dann, wenn alle Münzen die Greedy-Eigenschaft haben.

Aufgabe G2 (Lokale Suche)
Betrachte das 0/1-Rucksack-Problem

$$\begin{array}{rrcl} \max & c^T x & & \\ \text{s.t.} & a^T x & \leq & b \\ & x & \in & \{0,1\}^n \end{array}$$

für

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ b = 5,\ c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix},\ b = 21,\ c = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 9 \\ 1 \\ 12 \\ 7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Bestimme zunächst mit dem Greedy-Algorithmus jeweils eine Startlösung und versuche dann diese mittels lokaler Suche zu verbessern.
Bemerkung: Der Optimalwert der ersten Instanz ist 10 und der der zweiten 38.

Hausübung

Aufgabe H1 (Modellierung)
Ein Mobilfunkanbieter betreibt deutschlandweit ein Netz von n Antennen. Jede Antenne empfängt Signale einer bestimmten Frequenz. Dem Mobilfunkanbieter stehen m verschiedene Frequenzen zur Verfügung, die den Antennen zugewiesen werden müssen.
Bei der Frequenzzuweisung müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

(1) Beträgt die (euklidische) Distanz zwischen zwei Antennen weniger als D_0 km, darf diesen beiden Antennen nicht dieselbe Frequenz zugewiesen werden.

(2) Bei einer Distanz zwischen D_0 und $D_1 > D_0$ km darf zwar dieselbe Frequenz zugewiesen werden, die dabei auftretenden Interferenzen verursachen jedoch Kosten von c Geldeinheiten pro Paar von interferierenden Antennen.

(3) Bei einer Distanz von mehr als D_1 km dürfen beide Antennen mit der selben Frequenz betrieben werden, ohne dass zusätzliche Kosten entstehen.

a) Formulieren Sie das Problem, eine kostenminimale Frequenzzuweisung zu finden, als ganzzahliges Programm.

b) Für Antennen, welche in Grenznähe stehen, kann es Einschränkungen hinsichtlich der zuweisbaren Frequenzen geben. D. h. für jede Antenne in einem Grenzgebiet gibt es eine Teilmenge von $\{1, \ldots, m\}$ der für diese Antenne zulässigen Frequenzen.

   Erweitern Sie Ihr Modell aus a) derart, dass dieser Sachverhalt mit berücksichtigt wird.