Diskrete Optimierung
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

SoSe 2011
28.06/01.07.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Dantzig-Wolfe Dekomposition)
Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph mit Knotenmenge V, Kantenmenge E und n die Anzahl der Knoten. Betrachte das binäre Programm

$$\begin{array}{rrcll}
\min & \sum_{k=1}^{n} \delta_k & & & \\
\text{s.t.} & x_{ik}+x_{jk} & \leq & \delta_k & \text{für alle } (i,j)\in E \text{ und } k\in\{1,\ldots,n\} \\
& \sum_{k=1}^{n} x_{ik} & = & 1 & \text{für alle } i\in V \\
& x & \in & \{0,1\}^{n\times n} & \\
& \delta & \in & \{0,1\}^{n} &
\end{array}$$

(a) Zeige, dass das obige binäre Programm die Färbungszahl liefert und aus einer Optimallösung eine optimale Färbung bestimmt werden kann.

Eine *zulässige Färbung* eines Graphen ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass je zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, unterschiedliche Farben zugeordnet werden, das heißt, dass für alle Kanten $\{i,j\}\in E$ die Bedingung $f(i)\neq f(j)$ erfüllt ist. Die *Färbungszahl* ist die kleinstmögliche Anzahl von Farben, für die es eine zulässige Färbung gibt.

(b) Bestimme das Masterproblem der Dantzig-Wolfe-Dekomposition (siehe (3.20) im Skript), wobei $P^2=\text{conv}\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ \delta^T\end{smallmatrix}\right)\in\{0,1\}^{(n+1)\times n} \mid x_{ik}+x_{jk}\leq\delta_k \text{ für alle } \{i,j\}\in E \text{ und } k\in\{1,\ldots,n\}\}$ gelte.

(c) Zeige, dass eine Vereinfachung des Ergebnisses aus Aufgabenteil (b) zu dem binären Programm

$$\begin{array}{rrcll}
\min & \sum_{s\in S_0} x_s & & & \\
\text{s.t.} & \sum_{s\in S_0 : i\in s} x_s & = & 1 & \text{für alle } i\in V \\
& x_s & \in & \{0,1\} & \text{für alle } s\in S_0
\end{array}$$

führt, wobei S die Menge der stabilen Mengen von G sei und $S_0 := S\setminus\{\emptyset\}$.

Aufgabe G2 (TSP und Lagrange-Relaxierung)
Sei $G=(V,E)$ ein vollständiger Graph mit $|V|=n$ Knoten und Kantengewichten c_{ij} für $1\leq i<j\leq n$. Wir betrachten das folgende ganzzahlige Programm, welches eine Formulierung für das symmetrische Traveling Salesman-Problem (TSP) auf G ist:

$$\min \quad \sum_{i<j} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 2, \quad i=1,\ldots,n \tag{2}$$

$$\sum_{i<j} x_{ij} = n \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j)\in\gamma(S),\, i<j} x_{ij} \leq |S|-1 \quad \forall S\subseteq V\setminus\{1\},\ |S|\geq 3 \tag{4}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j. \tag{5}$$

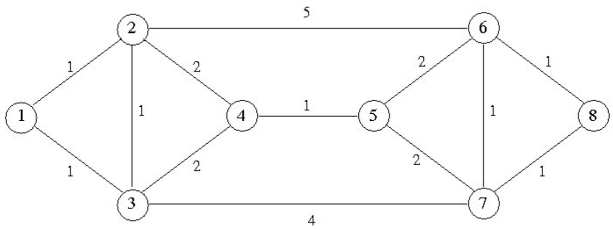
In Ungleichung (4) ist mit $\gamma(S)$ die Menge aller Kanten gemeint, welche je zwei Knoten in S verbinden.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\lambda)$ und die Lagrange-Relaxierung bzgl. der Nebenbedingungen (2) für $i = 2, \ldots, n$ an.

b) Welche Eigenschaften haben die zulässigen Lösungen des relaxierten Problems im Vergleich zu einer Tour?

c) Bringen Sie die Lagrange-Relaxierung aus Aufgabenteil a) in eine Form, die es erlaubt, die Berechnung von $L(\lambda)$ auf die Bestimmung eines gewichtsminimalen 1-Baumes (siehe Aufgabenteil b)) zurückzuführen. Modifizieren Sie dazu die Kantengewichte c geeignet.

d) Bestimmen Sie die Optimallösung des relaxierten TSP zu $\lambda = 0$ für folgenden Graphen G:



Hausübung

Beachte: Die Hausübungen dürfen eine Woche später abgegeben werden.

Aufgabe H1 (Matroide)
Gegeben sei eine Menge $S \subseteq \mathbf{R}^n$. Sei $\mathscr{I}$ die Menge der (über $\mathbf{R}$) affin unabhängigen Teilmengen von S.

(a) Weise nach, dass $(S, \mathscr{I})$ ein Matroid ist.

(b) Sei nun

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbf{R}^3.$$

Löse das kombinatorische Optimierungsproblem

$$\max_{X \in \mathscr{I}} \left\{ \sum_{x \in X} x_1^2 \cdot x_3 \right\}.$$

Aufgabe H2 (Lokale Suche)
Betrachte den in Abbildung 1 dargestellten Graphen. Es soll mit Heuristiken eine möglichst große stabile Menge in dem

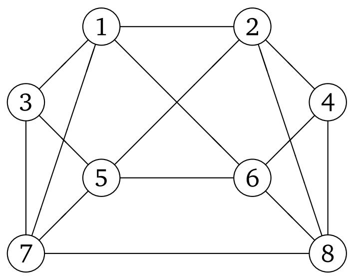


Abbildung 1: Eine Stabile-Mengen-Instanz

Graphen gefunden werden, wobei eine stabile Menge eine Teilmenge der Knotenmenge ist mit der Eigenschaft, dass keine zwei Knoten dieser Teilmenge durch eine Kante verbunden sind. Bestimme dazu mit einem Greedy-Algorithmus eine Startlösung und verbessere diese mittels lokaler Suche.