

Diskrete Optimierung

1. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl. Math. Konstantin Pertschik

SoSe 2011
19./21.04.2011

Gruppenübung

Aufgabe G1

Gegeben sei das folgende lineare Programm:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \max & 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.} & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 4 \\ & 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 \leq 3 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 5 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leq 1 \\ & x_1, \dots, x_5 \geq 0 \end{array}$$

- (a) Formuliere das duale Problem zu (P) .
- (b) Prüfe mit Hilfe des Satzes von komplementären Schlupf, ob $\bar{x} = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung von (P) ist.

Aufgabe G2

Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop. Zeige:

- (a) P hat endlich viele Ecken.
- (b) Ein Punkt $x \in P$ ist genau dann eine Ecke von P , wenn $P \setminus \{x\}$ konvex ist.
- (c) Sei F eine Seitenfläche von P . Dann entsprechen die Ecken von F genau den Ecken von P , die in F enthalten sind.
- (d) Eine Kante von P verbindet zwei Ecken von P .

Aufgabe G3

Ein $0/1$ -Polytop ist die konvexe Hülle einer Teilmenge von $\{0, 1\}^d$, der Eckenmenge des d -Würfels.

Zwei $0/1$ -Polytope heißen $0/1$ -äquivalent, falls man sie durch eine Symmetrie des d -Würfels ineinander überführen kann.

Klassifiziere alle 3-dimensionalen $0/1$ -Polytope (bis auf $0/1$ -Äquivalenz).

Aufgabe G4

Die beiden Polytope P_1 und P_2 seien definiert als konvexe Hülle der Zeilenvektoren der folgenden Matrizen:

$$P_1 = \text{conv} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \text{conv} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeige, P_1 und P_2 sind kongruent, aber nicht $0/1$ -äquivalent.

Hausübung

Aufgabe H1

(6 Punkte)

Betrachte die beiden zueinander dualen linearen Programme:

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Gib für jede mögliche Kombination in Hinblick auf die Lösbarkeit der beiden linearen Programme („endlich“, „unbeschränkt“, „unzulässig“) ein Beispiel.

Aufgabe H2

(6 Punkte)

Löse mit dem Simplex-Algorithmus:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ & 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Benutze die Phase I des Simplex-Algorithmus um eine zulässige Basislösung zu finden.