# Analysis 2
# 14. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Prof. Dr. B. Kümmerer**
W. Reußwig, K. Schwieger

**Fachbereich Mathematik**
11. Juli 2011

## Aufgabe 1 Integral vs. Summe

Es sei $f : [1, \infty[ \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar, positiv und monoton fallend. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es existiert $\int_1^\infty f(t)dt$.

(ii) Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f(n)$ ist konvergent.

## Aufgabe 2 Partielle Differentialgleichungen

Eine wichtige partielle Differentialgleichung in den Anwendungen ist die Wärmeleitungsgleichung: Sei $\Omega \subseteq [0, \infty[ \times \mathbb{R}^n$ offen und $k > 0$ eine Konstante. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist Lösung der Wärmeleitungsgleichung, wenn für alle $(t, x) \in \Omega$ gilt:

$$\frac{1}{k}\partial_t f(t,x) = \Delta f(t,x).$$

Hierbei ist $\Delta := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ der Laplace Operator.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\varphi(t,x) := \frac{1}{\sqrt{t^n}} \cdot \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{4kt}\right)$$

Lösungen der Wärmeleitungsgleichung darstellen.

(b) Sei nun $n = 1$. Zeigen sie, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t,x)dx = 2\sqrt{k}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)dx < \infty.$$

## Aufgabe 3 Eine skalare Funktion

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy^2$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_f$ vom Grad 2 im Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

(b) Untersuchen Sie $f$ auf lokale Extrema.