Analysis 2
12. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
27. Juni 2011

Aufgabe 1 Ein naiver Differentialquotient

Entscheiden Sie für folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^m \supseteq D \to \mathbb{R}^n$, ob folgender Grenzwert existiert und bestimmen sie diesen gegebenenfalls:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\left\| x - x_0 \right\|}.$$

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to R$, $f(x, y) = 2x - y$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Macht obiger Grenzwert zur Verallgemeinerung der eindimensionalen Ableitung Sinn?

Aufgabe 2 Linearität der Ableitung

Seien $f, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ im Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar mit Ableitungen $Df(x_0)$ und $Dg(x_0)$. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $f + g$ im Punkt x_0 differenzierbar ist und bestimmen sie deren Ableitung.

Aufgabe 3 Alte und neue Definition der Ableitung eines Weges

Zeigen Sie, dass die Differenzierbarkeit eines Weges im Sinne von 13.5. der Vorlesung äquivalent ist zur Differenzierbarkeit einer Funktion $\gamma : \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n$ Sinne von 13.7 der Volesung.

Aufgabe 4 Bilineare Funktionen

Wir erinnern an die Definition einer bilinearen Funktion: Es seien E, F, V Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Funktion $B : E \times F \to V$ heißt *bilinear*, wenn für alle $e_1, e_2 \in E$, $f_1, f_2 \in F$ und $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ gilt:

$$B(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) = \sum_{i,j=1}^{2} \lambda_i \mu_j \cdot B(e_i, f_j).$$

Sind nun E, F und V Banachräume, so wird $E \times F$ durch komponentenweise Operationen (vgl. LA) zu einem Vektorraum und der Norm $\left\|(e, f)\right\| := \max\left\{\|e\|, \left\|f\right\|\right\}$ wieder zu einem Banachraum.
Um die Notation einfach zu halten, betrachten wir in dieser Aufgabe nur bilineare Funktionen $B : E \times E \to F$.

Aufgabe 4.1 Die Ableitung stetiger bilinearer Funktionen

Es sei $B : E \times E \to F$ eine stetige bilineare Funktion. In dieser Aufgabe wollen wir die Ableitung von B in einem Punkt $(x, y) \in E \times E$ bestimmen.

(a) Dazu betrachten wir zuerst die einfachst mögliche bilineare Funktion:
Sei $E = F = \mathbb{R}$ und $B(x, y) := x \cdot y$. Zeigen Sie, dass folgendes gilt:

$$B(x+h, y+k) = B(x, y) + B(x, k) + B(y, h) + B(h, k).$$

Bestimmen Sie nun eine lineare Abbildung $L(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Restfunktion $r(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass gilt

$$B(x+h, y+k) = B(x, y) + L(x, y)(h, k) + r(x, y)(h, k) \cdot \|(h, k)\|$$

mit $\lim_{(h,k)\to 0} r(x, y)(h, k) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Für alle Banachräume E und F ist jede stetige bilineare Funktion $B : E \times E \to F$ an jeder Stelle $(x, y) \in E \times E$ differenzierbar. Bestimmen sie dort deren Ableitung.

Aufgabe 4.2 Anwendungen

Bestimmen Sie von folgenden Funktionen die Ableitungen, wobei Sie die Resultate der Zusatzaufgabe verwenden dürfen, um Stetigkeit nachzuweisen:

(a) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \langle x, y \rangle$.

(b) $K : \mathscr{C}[0,1] \times \mathscr{C}[0,1] \to \mathbb{R}$, $K(f, g) := \int_0^1 f(x) g(x) dx$.

(c) $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $f(A) := A^2$.

(d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ für ein festes $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(e) $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ im Punkt $A = \mathbb{1}$.

(f) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x) := x \times x$.

Zusatzaufgabe 4.3 Charakterisierung von Stetigkeit bilinearer Funktionen

Es seien E und F Banachräume und $B : E \times E \to F$ bilinear. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

(1) Die Abbildung B ist stetig.

(2) Die Abbildung B ist im Punkt $(0, 0)$ stetig.

(3) Die Abbildung B ist auf der Menge $\left\{(x, y) \in E \times E,\ \|x\| \leq 1, \left\|y\right\| \leq 1\right\}$ beschränkt.

(4) Es existiert eine Konstante $C > 0$ mit $\left\|B(x, y)\right\| \leq C \cdot \|x\| \cdot \left\|y\right\|$.

Zeigen Sie weiter, dass jede bilineare Abbildung automatisch stetig ist, wenn ihr Definitionsbereich ein endlich dimensionaler Banachraum ist.