Analysis 2
11. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
20. Juni 2011

Aufgabe 1 Wo liegt e^{it}?

Zeigen Sie für $t \in [0, 2\pi[$: Die Länge des Kreisbogens von 1 bis e^{it} ist t. Gehen Sie dazu wie folgt vor: Wählen Sie geeignet n äquidistante Punkte auf dem Einheitskreis. Berechnen Sie die Länge des Streckenzuges, der die Punkte verbindet. Was geschieht, wenn Sie nun immer mehr Punkte nehmen ($n \to \infty$)?

Bemerkung: Allgemein definiert man die Länge eines differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ durch das Integral

$$L(\gamma) := \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt \, .$$

Berechnen Sie auf diese Weise die Länge des Kreisbogens von 1 bis e^{it}.

Aufgabe 2 Wege

a) Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Skizzieren Sie den Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := e^{t \cdot z} = e^{at} \cdot e^{ibt}$.

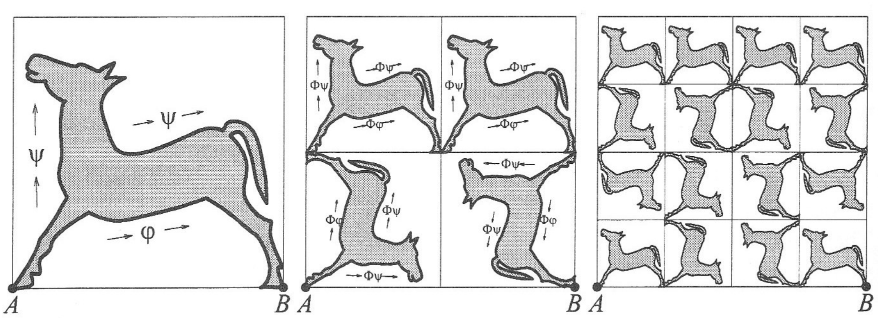
b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Skizzieren Sie den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \cos(n \cdot t) \cdot e^{it}$.

Aufgabe 3 Flächenfüllende Kurven

G. Cantor entdeckte 1887, dass das Intervall $[0, 1]$ genauso viele Punkte enthält, wie das Quadrat $[0, 1]^2$. G. Peano fand 1890 sogar eine **stetige**, surjektive Abbildung $\gamma : [0, 1] \to [0, 1]^2$, also ein Weg, dessen Bahn das gesamte Quadrat füllt. Die geometrische Konstruktion eines solchen Weges in dieser Aufgabe stammt von D. Hilbert aus dem Jahre 1891.

Wir starten mit einem beliebigen Weg $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]^2$, $\varphi(t) =: \big(x(t), y(t)\big)^T$ mit Startpunkt $(0, 0)^T$ und Endpunkt $(1, 0)^T$, z.B. einem der Wege aus Abbildung 1. Auf den ersten beiden Bilder von links ist gezeigt, wie sich φ in einen neuen Weg $\Phi\varphi : [0, 1] \to [0, 1]^2$ transformieren lässt, der erneut von $\Phi\varphi(0) = (0, 0)^T$ nach $\Phi\varphi(1) = (1, 0)^T$ läuft und durch alle Quadranten des geviertelten Quadrates läuft. Etwas genauer ist der Weg $\Phi\varphi$ gegeben durch

$$\Phi\varphi(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\big(y(4t), x(4t)\big)^T & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{4}\,, \\ \frac{1}{2}\big(x(4t-1), 1 + y(4t-1)\big)^T & \text{für } \frac{1}{4} \le t \le \frac{2}{4}\,, \\ \frac{1}{2}\big(1 + x(4t-2), 1 + y(4t-2)\big)^T & \text{für } \frac{2}{4} \le t \le \frac{3}{4}\,, \\ \frac{1}{2}\big(2 - y(4t-3), 1 - x(4t-3)\big)^T & \text{für } \frac{3}{4} \le t \le 1\,. \end{cases} \tag{1}$$



(Quelle: E. Haier, G. Wanner, Analysis by Its History, Springer 1996)

Abbildung 1: Hilberts Iteration

Wendet man die Transformation erneut an, so erhält man den Weg $\Phi^2\varphi$ im rechten Bild von Abbildung 1. Iteriert man dieses Verfahren, so entsteht eine Folge von Wegen $\varphi_n := \Phi^n\varphi : [0,1] \to [0,1]^2$.

a) Seien nun $\varphi, \psi : [0,1] \to [0,1]^2$ zwei Wege von $(0,0)^T$ nach $(1,0)^T$. Betrachten Sie die durch die Iteration gegebenen Wege $\varphi_n := \Phi^n\varphi$ und $\psi_n := \Phi^n\psi$. Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0,1]$ gilt

$$\left\|\varphi_n(t) - \psi_n(t)\right\|_2 \leq \sqrt{2} \cdot 2^{-n} .$$

Hinweis: Argumentieren Sie anhand von Abbildung 1. Die genaue Rekursionsvorschrift in (1) benötigen Sie hierfür nicht.

b) Folgern Sie: Die Folge $(\varphi_n)_n$ (und analog ψ_n) ist eine Cauchy-Folge bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz. Insbesondere konvergiert diese Folge gegen einen stetigen (!) Weg $\varphi_\infty : [0,1] \to [0,1]^2$ (bzw. ψ_∞).

c) Folgern Sie weiter, dass der Grenzwert nicht von der Wahl des Startweges φ abhängt, d.h. $\varphi_\infty = \psi_\infty$.

d) Zeigen Sie, dass der Grenzwert φ_∞ das Intervall $[0,1]$ surjektiv auf das Quadrat $[0,1]^2$ abbildet.