# Analysis 2
# 10. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Prof. Dr. B. Kümmerer**
W. Reußwig, K. Schwieger

**Fachbereich Mathematik**
13. Juni 2011

## Aufgabe 1 Tschebyscheff-Ungleichung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $\varepsilon > 0$. Weiter sei $[a_0, b_0] \subseteq [a, b]$ ein Teilintervall mit $\left|f(x)\right| \geq \varepsilon$ für alle $x \in [a_0, b_0]$. Zeigen Sie für $p > 0$ die sog. *Tschebyscheff-Ungleichung*

$$\varepsilon^p(b_0 - a_0) \leq \int_a^b \left|f(x)\right|^p \, dx \, .$$

**Bemerkung:** Insbesondere für $p = 2$ spielt die Ungleichung eine große Rolle in der Stochastik. Dort lässt sich das Integral auf der rechten Seite als Varianz interpretieren.

## Aufgabe 2 Berechnung von Integralen

Berechnen Sie durch partielle Integration für $0 < a < b$ das Integral

$$\int_a^b \cos(\ln x) \, dx$$

und durch geeignete Substitution für $-\pi/2 < a < b < \pi/2$ das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + \tan^2 x} \, dx \, .$$

## Aufgabe 3 Quadratur, Numerische Integration

In vielen praktischen Fällen muss das Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ numerisch approximiert werden. Zur Vereinfachung der Notation betrachten wir hier o.B.d.A. nur das Intervall $[0, 1]$. Ein typisches Verfahren zur Approximation des Integrals besteht darin, das Intervall äquidistant zu unterteilen, d.h., für $1 \leq N \in \mathbb{N}$ betrachte wir die Unterteilung

$$x_0 := 0 \, , \qquad x_1 := 1/N \, , \qquad x_2 := 2/N \, , \qquad \ldots \qquad x_{N-1} := (N-1)/N \, , \qquad x_N := 1 \, .$$

Auf einem oder mehreren der Teilintervalle wird die Funktion $f$ dann durch geeignete Polynome ersetzt. Das Integral $Q_N(f)$ dieser Polynome liefert dann die Approximation des Integrals auf dem entspr. Intervall. Die Gleichung zur Berechnung der Approximation heißt auch *Quadraturformel*.

## Aufgabe 3.1 Die Trapezregel

Bei der *Trapezregel* wird die Funktion auf jedem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ durch eine Gerade (Polynom vom Grad 1) durch die Punkte $\big(x_k, f(x_k)\big)$ und $\big(x_{k+1}, f(x_{k+1})\big)$ ersetzt.

a) Wieso heißt diese Approximation Trapezregel? Skizzieren Sie dazu für eine Funktion $f$ (z.B. $f(t) = t^2 - \frac{1}{2}$) die approximierende Funktion.

b) Verifizieren Sie die Quadraturformel der Trapezregel:

$$Q_N(f) := \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \,.$$

c) Machen Sie sich klar, dass die Quadraturformel der Trapezregel für Polynome $p$ vom Grad kleiner gleich 1 exakt ist, d.h., für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$Q_N(p) = \int_0^1 p(t)\, dt \,.$$

## Aufgabe 3.2 Die Simpsonregel

Bei der *Simpsonregel* oder *Kepplerschen Fassregel* wird wie Funktion auf dem Intervall $[x_k, x_{k+2}]$ für $k$ gerade durch die Parabel (Polynom vom Grad 2) durch die Punkte $\big(x_k, f(x_k)\big)$, $\big(x_{k+1}, f(x_{k+1})\big)$ und $\big(x_{k+2}, f(x_{k+2})\big)$ ersetzt.

a) Verifizieren Sie die Quadraturformel für die Simpsonregel ($N$ gerade):

$$\begin{aligned} Q_N(f) &:= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N/2-2} \frac{f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})}{6} \\ &= \frac{1}{3N}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{N-1}) + f(x_N)\big) \,. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Quadraturformel der Simpsonregel für Polynome vom Grad kleiner gleich 3 exakt ist.
**Bemerkung:** Das mag etwas erstaunen, weil die Funktion $f$ nur durch quadratische Polynome ersetzt wird.