Analysis 2
9. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
6. Juni 2011

Aufgabe 1 Gerade / ungerade Funktionen

Eine Funktion $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$ gilt. Die Funktion heißt *ungerade*, falls $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in [-a,a]$ gilt. Zeigen Sie für eine Regelfunktion $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$:

a) Sei f differenzierbar. Ist f gerade, so ist die Ableitung f' ungerade. Ist f ungerade, so ist die Ableitung f' gerade.

b) Ist f ungerade, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

c) Ist f gerade, so gilt $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Aufgabe 2 Stückweise stetige Funktionen

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig*, falls es Stellen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ gibt, sodass f auf jedem der Intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ mit $0 \leq k < n$ stetig ist.

Zeigen Sie: Eine Funktion ist stückweise stetig genau dann, wenn sie Summe einer stetigen Funktion und einer Treppenfunktion ist. Insbesondere ist eine stückweise stetige Funktion eine Regelfunktion.

Aufgabe 3 Elementare Berechnung eines Integrals

In der 8. Übung haben wir das Integral $\int_0^a x^3\ dx$ elementar berechnet. Wir wollen in dieser Aufgabe für $p > 0$ das Integral $\int_0^a f(x)\,dx$ der Funktion $f(x) := x^p$ elementar berechnen. Für $0 < \theta < 1$ betrachte wir die (unendliche) Unterteilung $\cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_0 = a$ mit $x_k := \theta^k \cdot a$ für $k \in \mathbb{N}$ und die Funktion

$$t_\theta := \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) \cdot \chi_{]x_{k+1}, x_k]} \,.$$

Skizzieren Sie die Funktion t_θ, und berechnen Sie damit das gesuchte Integral.