Analysis 2
8. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
30. Mai 2011

Aufgabe 1 Konvex folgt stetig

Zeigen Sie: Jede konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Aufgabe 2 Regelfunktionen sind stetig von links und rechts.

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Zeigen Sie: Für jedes $x_0 \in [a, b[$ existiert der rechtsseitige Grenzwert

$$f_+(x) := \lim_{x \searrow x_0} f(x),$$

und für jedes $x_0 \in]a, b]$ existiert der linksseitige Grenzwert $f_-(x) := \lim_{x \nearrow x_0} f(x)$.

Aufgabe 3

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen. Zeigen Sie:

a) Die Funktion f (und ebenso g) ist beschränkt.

b) Der Betrag $|f| : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto |f(x)|$ ist wieder eine Regelfunktion.

c) Das Produkt $f \cdot g : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ ist wieder eine Regelfunktion.

Zusatzaufgabe: Stetige Charakterisierung von Regelfunktionen

Wir haben in Aufgabe 2 gesehen, dass für Regelfunktionen der links- und rechtsseitig Grenzwert existiert. Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass auch die Umkehrung gilt. Sei hierzu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass der links- und rechtsseitige Grenzwert existiert. Wir müssen zeigen, dass f gleichmäßiger Limes von Treppenfunktionen ist. Sei hierzu $\varepsilon > 0$.

a) Zeigen Sie: Für jedes $x \in [a, b]$ gibt es ein $\delta(x) > 0$ mit:

   1. Für jedes $y \in [a, b]$ mit $x - \delta(x) < y < x$ gilt $\left| f(y) - f_-(x) \right| < \varepsilon$.

   2. Für jedes $y \in [a, b]$ mit $x < y < x + \delta(x)$ gilt $\left| f(y) - f_+(x) \right| < \varepsilon$.

b) Folgern Sie mit Hilfe der Kompaktheit von $[a,b]$: Es gibt $x_1,\dots,x_n \in [a,b]$, so dass jedes $y \in [a,b]$ in einem der Intervalle $U_k :=]x_k - \delta(x_k),\ x_k + \delta(x_k)[$ liegt, d.h.

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k$$

c) Betrachten Sie zuerst eines der Intervalle U_k mit $1 \leq k \leq n$. Konstruieren Sie auf diesem Intervall eine Treppenfunktion t_k mit $\left|f(x) - t_k(x)\right| < \varepsilon$ für alle $x \in U_k$.

d) Konstruieren Sie aus den Funktionen $t_k : U_k \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\left\|f - t\right\|_\infty \leq \varepsilon$.