Analysis 2
7. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
23. Mai 2011

Aufgabe 1 Leibnizsche Formel

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei n-mal differenzierbare Funktionen.

a) Zeigen Sie die sog. *Leibnizsche Formel*

$$\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) .$$

Hinweis: Es gilt $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ für $n \geq k \geq 1$.

b) Berechnen Sie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^3 e^x$ die tausendste Ableitung $f^{(1000)}$.

Aufgabe 2 Taylor-(und)Polynome

a) Bestimmen Sie im Entwicklungspunkt 0 das Taylorpolynom der Ordnung 3 von $p(x) := x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.

b) Bestimmen Sie im Entwicklungspunkt 0 das Taylorpolynom der Ordnung 16 von $p(x) := x^{18} + 4x^{15} + 3x^9 - 8x^5 + 2x^3 + 5x$.

Aufgabe 3

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze in einer Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ stetige Ableitungen bis zur Ordnung $n \geq 3$. Weiter gelte

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 , \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0 .$$

Zeigen Sie:

a) Ist n ungerade, so ist x_0 keine Extremalstelle.

b) Ist n gerade, so ist x_0 eine Extremalstelle. Wann ist x_0 ein Maximum, wann ein Minimum?

Aufgabe 4 L'Hospital

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} , \qquad \lim_{x\nearrow 1} \ln(x) \cdot \ln(1-x) , \qquad \lim_{x\searrow 0} x^x , \qquad \lim_{x\searrow 0} (\tfrac{1}{x} + \ln x) , \qquad \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{n} - 1) .$$