Analysis 2
6. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
16. Mai 2011

Aufgabe 1 Eine Unstetige Ableitung einer differenzierbaren Funktion

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie $f'(0)$.

(b) Bestimmen Sie die Punkte, auf welchen f' stetig ist.

Aufgabe 2 Das Newton Verfahren

Ein wichtiges numerisches Verfahren zur Approximation von Nullstellen stetig differenzierbarer Funktionen ist das Newton Verfahren. Es verwendet iterativ die Idee der Linearisierung:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktion, die in $[a,b]$ eine Nullstelle besitzen möge.
Wir starten mit einer beliebigen Zahl $x_0 \in [a,b]$. Weiter bestimmen wir die Tangente im Graphen an den Punkt $(x_0, f(x_0))$. Diese besitzt, sofern $f'(x_0) \neq 0$ ist, einen Schnittpunkt x_1 mit der x-Achse. Sofern dieser Schnittpunkt x_1 im Intervall $[a.b]$ liegt, ist x_1 der erste Näherungswert des Newtonverfahrens für die Nullstelle der Funktion.

(a) Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Näherungswerte des Verfahrens. Stellen Sie eine Vorschrift auf, x_{n+1} in Abhängigkeit von x_n zu berechnen.

(b) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 - a$ mit $a > 1$ auf dem Intervall $[0,a]$. Stellen Sie die Iterationsvorschrift des Newton Verfahrens für diese Funktion f explizit auf und argumentieren Sie, warum dieses Verfahren konvergiert.
Hinweis: Erinnern Sie sich an Analysis I.

(c) Angenommen, das Newtonverfahren liefert Ihnen eine gegen $\xi \in [a,b]$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiter sei $f'(\xi) \neq 0$. Warum ist ξ eine Nullstelle der Funktion f?

(d) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^3 - 5x$ auf dem Intervall $[-42, 42]$. Deren Nullstellenmenge ist offensichtlich die Menge $\{-\sqrt{5}, 0.\sqrt{5}\}$. Führen Sie die ersten Iterationen des Newton Verfahrens mit Startwert $x_0 := 1$ durch. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 3 Eine hinreichende Bedingung zur Konvergenz des Newton Verfahrens

In dieser Aufgabe wollen wir eine Klasse von Funktionen betrachten, für welche das Newton Verfahren konvergiert. Sei dazu f eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf dem Intervall $[a, b]$, welche folgenden Eigenschaften haben möge:

(i) Die Funktion f besitze in $[a, b]$ eine Nullstelle ξ.

(ii) Es gelte für alle $x \in [a, b]$ die Bedingung $f'(x) > 0$ und $f''(x) \geq 0$.

(iii) Der erste Iterationsschritt des Newtonverfahrens x_1 für eine Intervallgrenze $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ liege wieder in $[a, b]$.

Zeigen Sie, dass für solch eine Funktion das Newton Verfahren konvergiert, indem Sie wie folgt vorgehen:

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f genau eine Nullstelle $\xi \in [a, b]$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ differenzierbar ist und berechnen Sie deren Ableitung φ'.

(c) Zeigen Sie, dass φ auf dem Intervall $[a, \xi]$ monoton fällt und auf $[\xi, b]$ monoton wächst. Folgern Sie, dass ξ ein Minimum der Funtkion φ.

(d) Zeigen Sie, dass für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ für den ersten Iterationsschritt des Newtonverfahrens x_1 gilt: $x_1 \in [\xi, b]$.

(e) Zeigen Sie, dass $\varphi(x) \leq x$ für alle $x \in [\xi, b]$ gilt.

(f) Zeigen Sie, dass das Newtonverfahren für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$ eine gegen ξ konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liefert, welche ab $n = 1$ monoton fällt.

Aufgabe 4 Eine Anwendung

Wenden Sie die Resultate von Aufgabe 3 an, um ein Verfahren anzugeben, welches für eine reelle Zahl $b > 1$ und eine natürliche Zahl $k > 1$ die Zahl $\sqrt[k]{b}$ berechnet.