# Analysis 2
# 5. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Prof. Dr. B. Kümmerer**
W. Reußwig, K. Schwieger

**Fachbereich Mathematik**
9. Mai 2011

## Aufgabe 1 Kompaktheit

Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq X$ *folgenkompakt*, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ einen Häufungspunkt $x \in A$ besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass jede kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ auch folgenkompakt ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede folgenkompakte Teilmenge $A \subseteq X$ vollständig ist. Damit ist also jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raums vollständig.

Man kann übrigens zeigen, dass folgenkompakte Mengen in metrischen Räumen kompakt sind. Wir lassen den Beweis dieses Resultats als Sternchen Aufgabe übrig. Zu finden ist dieser in fast jedem guten Topologie Buch, z. B. in *B. v. Querenburg, Mengentheoretische Topologie*.

## Aufgabe 2 Gleichmäßig stetige Funktionen am Rand

Es seien $(X,d_1)$ und $(Y,d_2)$ vollständige metrische Räume. Weiter sei $f : D \subseteq X \to Y$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion $f$ bildet Cauchyfolgen in $X$ auf Cauchyfolgen in $Y$ ab.

(b) Angenommen, zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ konvergieren in $X$ gegen denselben Punkt $x_0 \in X$, dann konvergieren auch die Bildfolgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ und $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ gegen denselben Punkt $y_0 \in Y$.

(c) Die Funktion $f : D \to Y$ ist zu einer gleichmäßig stetigen Funktion $\tilde{f} : \overline{D} \to Y$ fortsetzbar.

Wir betrachten nun den Spezialfall $(X,d) := (X,d_1) = (Y,d_2) = (\mathbb{R}\backslash, |\cdot|)$ und die Funktion $f(x) := \frac{1}{x}$ mit Definitionsbereich $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe von (c), dass die Funktion $f$ auf $D$ nicht gleichmäßig stetig sein kann.

(e) Zeigen Sie direkt, also mit Hilfe der Definitionen, dass die Funktion $f$ auf $D$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.