Analysis 2
4. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
2. Mai 2011

Aufgabe 1 Kompakte Mengen I

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subseteq X$ eine kompakte Menge. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition: Ist $A \subseteq K$ eine abgeschlossene Menge, so ist A kompakt.

Aufgabe 2 Kompakte Mengen II

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subseteq X$ eine kompakte Menge. Zeigen Sie, dass K abgeschlossen ist, indem Sie wie folgt vorgehen:
Sei $x \in \overline{K}$.

(a) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ist die Menge

$$A_m := \left\{ x_n : d(x, x_n) \leq \frac{1}{m} \right\} \cup \{x\}$$

abgeschlossen in X.

Hinweis: Eventuell ist es nützlich, dass Sie sich $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ klar machen.

(b) Es gilt $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m = \{x\}$.

(c) Es gilt $K \cap \bigcap_{i\in\{m_1,\ldots,m_k\}} A_i \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $\{m_1, \ldots, m_k\} \subseteq \mathbb{N}$.

(d) Wenden Sie nun die endliche Durchschnittseigenschaft vom aktuellen 4. Übungsblatt (Hausübung Aufgabe 5) an, um zu folgern, dass $x \in K$ gilt.

Folgern Sie abschließend, dass $K = \overline{K}$ gilt, also K abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 3 Gegenbeispiele I

Wir betrachten den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Finden Sie Gegenbeispiele zum Hauptsatz über stetige Funktionen auf Kompakta:

(a) Geben Sie eine reellwertige stetige Funktion f auf einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, die kein Maximum und kein Minimum besitzt.

(b) Geben Sie eine reellwertige stetige Funktion f auf einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f(A)$ keine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4 Quotientenkriterium für Potenzreihen

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter existiere

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: q.$$

Zeigen Sie: Es ist $R := \frac{1}{q}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe, sofern $q \neq 0$ gilt. Gilt $q = 0$, so konvergiert die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ absolut.

Sternchen Aufgabe: Gegenbeispiel II

Finden Sie eine stetige bijektive Funktion $f : [0,1[\to X \subseteq \mathbb{R}^2$, so dass die Umkehrabbildung $f^{-1} : X \to [0,1[$ nicht stetig ist.