Analysis 2
2. Tutorium

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
18. April 2011

Aufgabe 1 Über die Nullstellenmenge der Kosinusfunktion

Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge der reellen Kosinusfunktion $N := \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\}$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie weiter, dass die Menge $N \cap]0, \infty[$ ein kleinstes Element besitzt.

Aufgabe 2 Eigenschaften der Kosinusfunktion

Wir betrachten die Kosinusfunktion $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebige Zahlen. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) Es gilt $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$.

(b) Es gilt $\cos(z - w) = \cos(z)\cos(w) + \sin(z)\sin(w)$.

(c) Der Betrag der Kosinusfunktion ist auf $\mathbb{C}$ unbeschränkt: Es gibt also für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $|\cos(z)| > n$.

Aufgabe 3 Punktweise vs. gleichmäßige Konvergenz

Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgende reellwertige Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 : & x < n \\ 1 : & x \geq n. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie für einige natürliche Zahlen die Funktion f_n.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion f.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 4 Exponentialfunktion und gleichmäßige Konvergenz

Aus der Vorlesung kennen wir die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \ \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Wir betrachten diese Funktion auf der abgeschlossenen Kreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 1\}$. Weiter sei

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Dies ist also ein Polynom n-ten Grades, welches mit der Exponentialreihe in den ersten $(n+1)$ Gliedern übereinstimmt. Wir geben jedem Polynom p_n ebenfalls $\mathbb{D}$ als Definitionsbereich.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{D}$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion konvergiert.

(b*) Erinnern Sie sich, ggf. aus der Schule, an den Graphen der reellen Exponentialfunktion und an typische Graphen reeller Polynomfunktionen. Betrachten Sie den Bereich $]-\infty, 0]$. Warum kann die Funktionenfolge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht auf ganz $\mathbb{C}$ gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion konvergieren? Diskutieren Sie eine Beweisstrategie für diese Behauptung.