Analysis 2
14. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

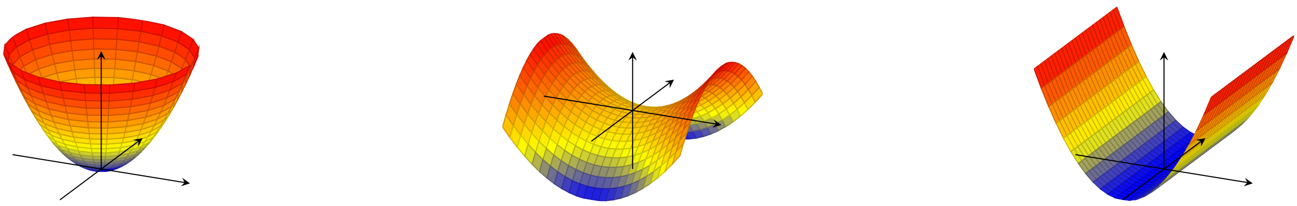
Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
11. Juli 2011

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1 Quadratische Funktionen

Betrachten Sie die folgenden Abbildungen von Funktionsgraphen quadratischer Funktionen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:



Wie sieht jeweils die Hessematrix der Funktion an der Stelle Null aus? Geben Sie zu jedem Graphen eine mögliche quadratische Funktion an.

Aufgabe 2 Taylor-Polynom

Berechnen Sie für die folgende Funktion das Taylor-Polynom der Ordnung 4 mit Entwicklungspunkt Null:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) := xyz \sin(x+y+z)\,.$$

Aufgabe 3

Seien $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \|x-a_1\|^2 + \cdots + \|x-a_N\|^2\,.$$

Zeigen Sie: Die Funktion f besitzt genau ein Minimum. Welchen Punkt x_0 erwarten Sie als Minimum?

Aufgabe 4 Drehinvarianz des Laplace-Operators

Es bezeichne Δ den Laplace-Operator auf $\mathbb{R}^n$, d.h. $\Delta f := \partial_1^2 f + \cdots + \partial_n^2 f$ für $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie: Für jede Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\Delta f = \partial_{v_1}^2 f + \cdots + \partial_{v_n}^2 f \,, \qquad\qquad f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

Hinweis: Für $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ und eine orthogonale Matrix $O \in M_n$ betrachten Sie die Funktion $g := f \circ S_O$ mit der Drehung $S_O(x) = Ox$. Alternativ: Wie hängen die 2-fachen Richtungsableitungen ∂_v^2 mit der Hesse-Matrix von f zusammen?

Aufgabe 5 (falls noch Zeit ist) Bifurkation

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := e^{xy} + x^2 + \lambda y^2$$

in Abhängigkeit von $\lambda > 0$.
Bemerkung: Die Aufgabe hat es in sich. Gehen Sie sorgfältig vor.