Analysis 2
13. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
4. Juli 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Tangentialhyperebene

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := (x \cdot y)^{\frac{1}{3}}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialhyperebene in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ im Punkt $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 Eine Verallgemeinerte Produktregel

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und seien $f, g \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Wir definieren die Funktion $f \cdot g$ über das punktweise Produkt:

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f \cdot g$ ebenfalls ein Element von $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ ist und beweisen Sie die Produktregel:

$$d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df.$$

Hierbei bedeutet natürlich $f \cdot dg$, dass für jedes $x \in \Omega$ der Zeilenvektor $dg(x)$ mit der Zahl $f(x)$ multipliziert wird.
Bemerkung: Beweisen Sie dies durch geschickte Verkettung mit der Funktion

$$m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\alpha, \beta) \to \alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$$

und mit Anwendung der Kettenregel.

Aufgabe 3 Divergenz, Rotation und Gradient

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F \in \mathscr{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Wir definieren *Divergenz* und *Rotation* des Vektorfeldes F:

$$\operatorname{div}(F) := \sum_{k=1}^{3} \partial_k F_k,$$

$$\operatorname{rot}(F) := \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wir betrachten das lineare Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welches gegeben ist durch:

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Divergenz und Rotation dieses Feldes.

(b) Zeigen Sie, dass für die Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes folgender Zusammenhang zur Jakobi Matrix J_F besteht:

$$\operatorname{div}(F)(x,y,z) = \operatorname{Tr}(J_F(x,y,z)).$$

$$\operatorname{rot}(F)(x_0,y_0,z_0) \times \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \left(J_F(x_0,y_0,z_0) - J_F(x_0,y_0,z_0)^T \right) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}.$$

Hierbei bezeichnet Tr die Spur auf den 3×3 Matrizen.

(c) Sei $G = \operatorname{rot}(F)$. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld G *quellenfrei* ist, also $\operatorname{div}(G) = 0$ gilt.

Die geometrische Bedeutung der Größen Rotation und Divergenz werden Ihnen, falls Sie keine Physik studieren, später im Studium deutlicher, sobald Sie sich mit mehrdimensionalen Integrationsbegriffen beschäftigen. Zum Studium der Geometrie von Ω sind die Begriffe Rotation und Divergenz ebenfalls nützlich.

Aufgabe 4 Eindimensionales Differenzieren

Betrachten Sie die Funktion

$$F(x) := \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

Ist diese Funktion differenzierbar und wenn ja, was ist Ihre Ableitung?

Hausübungen

Aufgabe 1 Richtungsableitungen

(a) Betrachten Sie folgende Funktionen und Vektoren im $\mathbb{R}^2$:

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ mit $\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) $f(x,y,z) = z^2 + ze^y$ mit $\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass in beiden Fällen die Richtungsableitung der Funktion f in Richtung v im Punkt ξ_0 existiert und berechnen Sie diese. Normieren Sie ggf. den Richtungsvektor v.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ *radialsymmetrisch*, d.h es gebe eine Funktion $f_r :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $f(x) = f_r(\|x\|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\nabla f(x) = f_r'(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|},$$

sofern alle beteiligten Funktionen differenzierbar in x, bzw. $\|x\|$ sind.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar und *homogen vom Grad* $p > 0$, d. h. es gelte für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$: $f(\alpha x) = \alpha^p f(x)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\left\langle \nabla f(x), x \right\rangle = p \cdot f(x).$$

Zusatzaufgabe: Differenzieren unterm Integral und der Satz von Fubini

In dieser Aufgabe stellen wir einige Werkzeuge bereit, die Sie für das Studium der Faltung brauchen können.
Wir betrachten das nicht leere Rechteck $\Omega := [a,b] \times [c,d] \in \mathbb{R}^2$. Weiter sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $F(x) := \int_c^d f(x,t)dt$ ist stetig.

(b) Ist f zusätzlich im inneren von Ω stetig partiell nach x differenzierbar, so ist die Funktion F stetig differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_c^d \partial_x f(x,t)dt.$$

(c) Die Funktion F ist integrierbar und es gilt

$$\int_a^b F(x)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Hinweis: Wenden Sie in (b) einen Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf einen Differenenquotienten von F an. Hierfür benötigen Sie die Voraussetzungen an f_x. Diskutieren Sie dann, dass die Zwischenstelle zwar von der anderen Variablen abhängig ist, dies jedoch für den Grenzübergang keine Rolle spielt. Für (c) verwenden Sie geschickt (b) und den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.
Bemerkung: Die Aussage in (c) heißt auch *Satz von Fubini* für stetige Funktionen. Je nach Integralbegriff kann für seine Gültigkeit deutlich weniger an die Funktion f als stetig vorausgestzt werden. Dies lernen Sie in Analysis 4.

Aufgabe 2 Eine interessante Funtkion

Wir betrachten folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right) & : x \in]-1,1[\\ 0 & : x \notin]-1,1[\end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist. Skizzieren Sie die Funktion.
Hinweis: Die dritte Hausübung des siebten Übungsblattes könnte nützlich sein.
Bemerkung: In dieser Aufgabe haben wir das Standardbeispiel für eine unendlich oft differenzierbare und kompakt getragene Funktion kennen gelernt. Was kompakt getragen bedeutet, sehen Sie in der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 3 Die Faltung

Sie dürfen die Resultate der vorigen Aufgaben verwenden, um diese Aufgabe zu bearbeiten, auch wenn Sie diese (noch) nicht bearbeitet haben.
Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir den *Träger von* f durch $T_f := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$. Dies ist also der Abschluß der Punkte, an welchen die Funktion nicht verschwindet. Die Menge aller Funktionen, welche stetig sind und deren Träger kompakt ist, bezeichnen wir mit $\mathscr{C}_C(\mathbb{R})$. Ein Beispiel für eine interessante Funktion mit kompaktem Träger haben Sie in der vorangegangenen Aufgabe gesehen. Weiter setzen wir $\mathscr{C}_C^n(\mathbb{R}) := \mathscr{C}_C(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$. Dies sind also die kompakt getragenen und n-fach stetig differenzierbaren Funktionen. (Warum sind deren Ableitungen wieder kompakt getragen?)
Es seien $f, g \in \mathscr{C}_C(\mathbb{R})$ Funktionen. Wir definieren die *Faltung* $f * g$ dieser Funktionen durch

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Faltung:

(a) Für den Träger von $f * g$ gilt: $T_{f*g} \subseteq T_f + T_g := \{a + b : \ a \in T_f, \ b \in T_g\}$

(b) Die Funktion $f * g$ ist integrierbar und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$.

(c) Wir erinnern an die Integralnorm $\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ einer stetigen integrierbaren Funtkion f. Es gilt:

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

(d) Die Faltung ist kommutativ.

(e) Ist $f \in \mathscr{C}_C^n(\mathbb{R})$, so ist auch $f * g \in \mathscr{C}_C^n(\mathbb{R})$ und es gilt

$$(f * g)^{(n)} = f^{(n)} * g.$$

Vorige Aufgabe zeigte übrigens, dass es nicht triviale Funtkionen in $\mathscr{C}_C^n(\mathbb{R})$ gibt, da eine unendlich oft differenzierbare kompakt getragene Funktion natürlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ im Raum $\mathscr{C}_C^n(\mathbb{R})$ liegt.
Beobachtung: Die Menge $\mathscr{C}_C(\mathbb{R})$ ist also mit $*$ eine normierte kommutative Algebra und jede der Mengen $\mathscr{C}_C^n(\mathbb{R})$ ein Faltungsideal.

(f*) Hat die Algebra $(\mathscr{C}_C(\mathbb{R}), *)$ eine Eins?