Analysis 2
12. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
27. Juni 2011

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1

Nehmen Sie zu folgender Rechnung Stellung:

$$\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{1} = -1 + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 2 Veranschaulichung von Funktionen

In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie sich verschiedene Funktionen z.B. als *Gebirgsfunktionen*, als *Temperaturverteilungen*, als *Vektorfelder* oder mit Hilfe von *Koordinatenlinien* grafisch veranschaulichen lassen. Veranschaulichen Sie folgende Funktionen. Machen Sie sich zuerst klar, welche grafische Darstellung geeignet ist.

a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y)^T \mapsto \sin(x^2+y^2)$,

b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)^T \mapsto \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)^T \mapsto (1,y)^T$,

d) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y)^T \mapsto \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

e) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z)^T \mapsto x+y+z$,

f) $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$.

Aufgabe 3 Kettenregel für partielle Ableitungen

Beweisen Sie mit Hilfe der Kettenregel für Ableitungen die folgende Aussage: Seien $g : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega_g \to \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^m \supseteq \Omega_f \to \mathbb{R}^k$ mit $g(\Omega_g) \subseteq \Omega_f$. Seien weiter g an der Stelle $a \in \Omega_g$ und f an der Stelle $g(a)$ differenzierbar. Dann gilt für alle $1 \le i \le k$ und $1 \le l \le m$

$$\frac{\partial (f_i \circ g)}{\partial x_l}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}\big(g(a)\big) \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_l}(a)\,.$$

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y):=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } x=y=0.\end{cases}$$

Zeigen Sie: f ist stetig, und an jeder Stelle existieren die partiellen Ableitungen nach x und y. Ist f differenzierbar?

Hausaufgaben

Aufgabe 1

a) Für welchen Werte von $\alpha\in\mathbb{R}$ existiert jeweils das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx\,,\qquad\qquad \int_1^\infty x^\alpha\,dx\,.$$

Bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals.

b) Existiert das folgende uneigentliche Integral? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Integralwert:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

Aufgabe 2 Wichtige Ableitungen

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind. Bestimmen Sie jeweils die Ableitung für jeden Punkt des Definitionsbereiches:

a) $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)^T\mapsto x\cdot y,$

b) $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (x_1,\dots,x_n)^T\mapsto x_1+\dots+x_n,$

c) $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto\|x\|_2,$

d) $\Omega\to\mathbb{R}^3,\ (r,\alpha,\beta)^T\mapsto\begin{pmatrix} r\ \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ r\ \cos(\alpha)\sin(\beta)\\ r\ \cos(\beta)\end{pmatrix}$

mit $\Omega:=\mathbb{R}^3$. Die Abbildung in d) heißt Transformation in *Kugelkoordinaten*.

Aufgabe 3 Parametrisierung von $\mathbb{S}^2$

Sei $\Omega := \mathbb{R}^2$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(\alpha,\beta) := \begin{pmatrix} \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos\beta \end{pmatrix} .$$

a) (Ohne Wertung) Machen Sie sich klar, dass f eine stetige Parametrisierung der Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ist, d.h. f ist stetig mit $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2$.

b) Zeigen Sie für $(\alpha_0, \beta_0) \in \Omega$: Durch

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(h) := f(\alpha_0,\beta_0) + df(\alpha_0,\beta_0) \cdot h$$

ist eine Parametrisierung der Tangentialebene zur Sphäre $\mathbb{S}^2$ an den Punkt $f(\alpha_0,\beta_0)$ gegeben.
Hinweis: Für die Sphäre $\mathbb{S}^2$ ist die Tangentialebene an $(x,y,z)^T \in \mathbb{S}^2$ diejenige (eindeutig bestimmte) Ebene, die den Punkt $(x,y,z)^T$ enthält und $(x,y,z)^T$ als Normalenvektor besitzt.

c) Sei $\gamma : I \to \Omega$ ein Weg im Parameterraum Ω und $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$ der entsprechende Weg auf der Spähre $\mathbb{S}^2$. Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0, z_0)^T := \tilde{\gamma}(t_0)$ der entsprechende Punkt der Bahn. Zeigen Sie: Der Vektor $\tilde{\gamma}(t_0) + \tilde{\gamma}'(t_0)$ liegt in der Tangentialebene an den Punkt $(x_0, y_0, z_0)^T$.

Aufgabe 4 Die Gammafunktion

a) Zeigen Sie: Das uneigentliche Integral

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt$$

existiert genau für $\alpha > 0$. Die Funktion $\alpha \mapsto \Gamma(\alpha)$ heißt *Gammafunktion*.

b) Zeigen Sie für $\alpha > 0$:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) .$$

Folgern Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n! .$$