Analysis 2
11. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
20. Juni 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Homotopie

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ ein fest gewählter Punkt. Ein Weg $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, also ein geschlossener Weg mit Start- und Endpunkt $x_0 \in X$, heißt auch eine *Schlaufe* und der Punkt x_0 heißt der *Basispunkt der Schlaufe*.
Um die Notation zu vereinfachen, lassen wir die explizite Erwähnung des Basispunkts im Folgenden weg: Es ist immer der am Anfang gewählte Punkt x_0 der Basispunkt.
Wir nennen zwei Schlaufen γ_0 und γ_1 *homotop*, falls es eine Familie von Schlaufen $(f_s)_{s\in[0,1]}$ gibt, so dass folgendes gilt:

- $f_0(t) = \gamma_0(t)$ für alle $t \in [0,1]$.
- $f_1(t) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [0,1]$.
- Die Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to X,\ H(s,t) := f_s(t)$ ist stetig.

Diese Abbildung H heißt auch *Homotopie*. Eine Homotopie führt also anschaulich eine Schlaufe stetig in eine andere Schlaufe über.
Sind γ_0 und γ_1 homotop, so schreiben wir $\gamma_0 \simeq \gamma_1$. Um auszudrücken, dass H eine Homotopie von γ_0 und γ_1 ist, schreiben wir auch $H : \gamma_0 \simeq \gamma_1$.
In den Hausübungen werden wir zeigen, dass Homotopie auf den Schlaufen eine Äquivalenzrelation definiert.

(a) Sei $X = \mathbb{C}$ und $x_0 = 0$. Finden Sie eine Homotopie zwischen den Wegen $\epsilon : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\epsilon(t) := 0$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) := \left(e^{2i\pi\cdot t} - 1\right)$.

(b) Sei $X = [-1,1]$, $x_0 = 0$ und $\epsilon(t) := 0$ für alle $t \in [0,1]$. Weiter sei γ eine beliebige Schlaufe in X. Zeigen Sie, dass ϵ und γ homotop sind.

Aufgabe 2 Pinocchios Nasenspitze

Pinocchio gehe den Weg

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Dabei läuft er derart, dass seine Nasenspitze immer in tangentialer Richtung zu seiner Bewegung nach vorne zeigt. Da er Geppetto aus einer großen deutschen Tageszeitung vorliest, verändert sich möglicherweise die Länge seiner Nase $n(t)$. Bestimmen Sie den Weg seiner Nasenspitze.

Aufgabe 3 Lissajous Kurven

Eine *Lissajous Kurve* ist ein Weg $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \\ a_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi) \end{pmatrix}$$

für Zahlen $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2, \varphi \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie für die Lissajous Kurve γ zu $a_1 = a_2 = 1$, $\omega_1 = 2, \omega_2 = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{6}$ die Schnittpunkte des Weges γ mit den Achsen und die Punkte mit waagerechter oder senkrechter Tangente. Skizzieren Sie grob die Kurve.

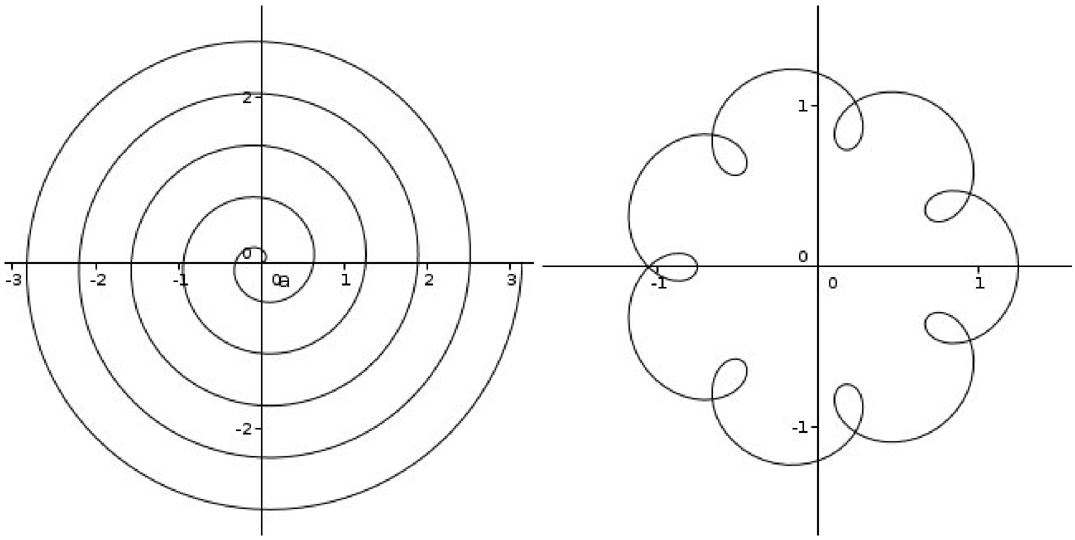
(b) Warum ist der Weg γ aus (a) ein periodischer Weg, dass heisst warum existiert eine Zahl $P \in]0, \infty[$ mit $\gamma(t) = \gamma(t + P)$ für alle $t \in \mathbb{R}$?

(c) Welche Bedingungen müssen im Allgemeinen für $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2, \varphi$ gelten, damit eine Lissajous Kurve γ ein periodischer Weg ist?

Bemerkung: Die Zahlen a_1, a_2 heißen *Amplituden*, die Zahlen ω_1, ω_2 heißen *Kreisfrequenzen* und die Zahl φ heißt *Phasenverschiebung* der Lissajous Kurve γ.

Aufgabe 4 Der Weg zur Bahn

Betrachten Sie folgende Kurven. Dies seien Bahnen von Wegen. Bestimmen Sie einen analytischen Ausdruck für Wege, welche die angegebenen Bahnen möglichst gut wiedergeben.



Hausübungen

Aufgabe 1 Produktregeln für Ableitungen von Wegen

Es sei $I := [0,1]$ und es seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbare Wege. Zeigen Sie folgende Rechenregeln:

(a) $\frac{d}{dt}\left\langle \gamma_1(t), \gamma_2(t) \right\rangle = \left\langle \gamma_1'(t), \gamma_2(t) \right\rangle + \left\langle \gamma_1(t), \gamma_2'(t) \right\rangle$.

(b) Ist $n = 3$, so gilt $\frac{d}{dt}\left(\gamma_1(t) \times \gamma_2(t)\right) = \gamma_1'(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \gamma_2'(t)$.

Aufgabe 2 Taylor Restglied

Aus der Vorlesung kennen Sie die Restgliedformel von Lagrange für Taylorpolynome. In dieser Aufgabe wollen wir eine andere Darstellung des Restgliedes beweisen.
Es sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und T_n das Taylorpolyom von f in einen Entwicklungspunkt $x_0 \in]a,b[$. Zeigen Sie: Für jedes $x \in]a,b[$ gilt

$$f(x) = T_n(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \, dt \; .$$

Hinweis: Vollständige Induktion könnte nützlich sein.

Aufgabe 3 Homotopie ist eine Äquivalenzrelation

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$ der Basispunkt. Im folgenden seien γ, γ_0, γ_1 und γ_2 Schlaufen im Sinn der Anwesenheitsübung.

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\simeq$ reflexiv ist, indem Sie eine konkrete Homotopie $H : \gamma \simeq \gamma$ angeben.

(b) Zeigen Sie, dass die Relation $\simeq$ symmetrisch ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Relation $\simeq$ transitiv ist, indem Sie zu Homotopien $H_0 : \gamma_0 \simeq \gamma_1$ und $H_1 : \gamma_1 \simeq \gamma_2$ eine Homotopie $H : \gamma_0 \simeq \gamma_2$ konstruieren.

Für die Äquivalenzklasse von γ schreiben wir wie gewohnt $[\gamma]$. Diese beinhaltet alle zu γ homotopen Schlaufen.

(d) Sei $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$ und γ eine beliebige Schlaufe. Zeigen Sie, dass dann $\gamma \simeq \gamma \circ \varphi$ gilt.

Hinweis: Teilaufgabe (d) kann ungemein hilfreich in der Zusatzaufgabe sein.

Zusatzaufgabe: Die Fundamentalgruppe

In dieser Aufgabe wollen wir das Konzept der Homotopie verwenden, um zu einem metrischen Raum (X,d) zum Basispunkt $x_0 \in X$ eine Gruppe zu assoziieren. Deshalb betrachten wir folgende Operationen auf den Schlaufen: Sind γ, γ_1 und γ_2 solche Schlaufen, so setze

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Weiter setze

$$\gamma^-(t) := \gamma(1-t).$$

Es ist also $\gamma_1 * \gamma_2$ bis auf Reskalierung nichts anderes, als nach dem Durchlauf von γ_1 noch γ_2 zu durchlaufen. Der Weg γ^- entspricht dem rückwärts gelaufenen Weg γ. Diese Operationen machen auf den Schlaufen zwar Sinn, allerdings machen sie diese Menge noch nicht zu einer Gruppe (Warum nicht?). Dazu studieren wir die Verträglichkeit der Operationen mit Homotopie:

(a) Zeigen Sie, dass folgende Multiplikation auf den Äquivalenzklassen der Schlaufen wohldefiniert ist: $[\gamma_1] \cdot [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$.

(b) Zeigen Sie, dass diese Multiplikation assoziativ ist.

(c) Betrachten Sie für den Weg $\epsilon(t) := x_0$ für alle $t \in [0,1]$ die Äquivalenzklasse $[\epsilon]$. Zeigen Sie, dass für jede Schlaufe γ folgendes gilt: $[\gamma] \cdot [\epsilon] = [\gamma] = [\epsilon] \cdot [\gamma]$.

(d) Zeigen Sie, dass für jede Schlaufe $[\gamma]$ folgendes gilt: $[\gamma] \cdot [\gamma^-] = [\epsilon] = [\gamma^-] \cdot [\gamma]$.

Die Äquivalenzklassen bilden also eine Gruppe, welche man die *Fundamentalgruppe von X mit Basispunkt x_0* nennt und mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnet.
Leider ist es mit unseren Mitteln sehr schwer zu zeigen, dass es metrische Räume gibt, die eine nicht triviale Fundamentalgruppe besitzen: Schon beim Kreis $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist das sehr mühsam, obwohl es anschaulich klar scheint. Aber vielleicht haben Sie ja eine gute Idee:

(e**) Zeigen Sie folgende Aussage: Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{T}, 1)$ des Kreises $\mathbb{T}$ ist nicht trivial: Die Schlaufe $\omega_1(t) := e^{2i\pi \cdot t}$ ist nicht zur konstanten Schlaufe $\epsilon(t) := 1$ homotop.

Bemerkung: Die Fundamentalgruppe des Kreises wird übrigens zyklisch von der Schlaufe ω_1 erzeugt: Es gilt $\pi_1(\mathbb{T}, 1) \cong \mathbb{Z}$. Die Gruppe ist also torsionsfrei, dass heisst keine der Schlaufen $\omega_n(t) := e^{2i\pi n \cdot t}$ ist für $n \neq 0$ zur konstanten Schlaufe $\epsilon = \omega_0$ homotop und es gilt $\omega_m * \omega_n \simeq \omega_{m+n}$.
An dieser Stelle könnten wir jetzt übrigens leicht den Fundamentalsatz der Algebra beweisen. Auch andere Aspekte der Funktionentheorie, also der Theorie komplex differenzierbarer Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ profitieren vom Konzept der Homotopie. Es kann sich also lohnen, sich hier mit Homotopie zu beschäftigen.

Knobelaufgabe: Sind Fundamentalgruppen in der Regel abelsch?

Stellen Sie sich vor, Sie wollten ein Bild aufhängen. Am Rahmen dieses Bildes sind dazu bereits beide Enden eines (längeren) Stücks Schnur befestigt. Ist es möglich, das Bild an zwei Nägeln derart aufzuhängen, so dass es runterfällt, wenn man irgendeinen der beiden Nägel entfernt? Erwarten Sie aus dieser Überlegung, dass die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ abelsch ist?
Hinweis: Wählen Sie einen beliebigen Basispunkt x_0, zum Beispiel den Mittelpunkt zwischen den beiden Nägeln oder einen Punkt auf dem Bilderrahmen, und zerlegen Sie ihre Schlaufe zur Befestigung des Bildes in ein dazu homotopes Produkt aus Schlaufen, welche sich je genau einmal um genau einen der beiden Nägel winden. Was müsste intuitiv passieren, wenn die Gruppe $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, x_0)$ eine abelsche, also kommutative, Gruppe wäre?
Bemerkung: Diese Aufgabe ist freiwillig, wird nicht bepunktet und ist eher als Ausblick zu verstehen.