Analysis 2
10. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
13. Juni 2011

Hausaufgaben

Aufgabe 1 Berechnung von Integralen

Berechnen Sie für $a < b$ die folgenden Integrale:

a) $\int_a^b x^2 e^x \, dx$,

b) $\int_a^b \cos^2 x \, dx$,

c) $\int_a^b \frac{x}{1+x^2} \, dx$,

d) $\int_a^b \tan x$ für $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$,

e) $\int_a^b x^n \ln x \, dx$ für $a, b > 0$,

f) $\int_a^b \sqrt{1+x^2} \, dx$.

g) $\int_a^b \sqrt{1-x^2} \, dx$ für $-1 < a < b < 1$,

Hinweis: Was sind die Ableitungen der Umkehrfunktionen arcsin, arccos, arsinh und arcosh?

Aufgabe 2 Fourierreihen

Wir betrachten den Raum $\mathscr{C}[-\pi, \pi]$ aller stetigen Funktionen $f : [-\pi, \pi]$ mit dem Skalarprodukt (vgl. 9. Übung, Hausaufg. 4)

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx \, .$$

a) Berechnen Sie für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die Integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx \, , \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) \, dx \, , \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, dx \, .$$

Folgern Sie, dass die Funktionen $f_0(x) := 1$, $f_n(x) := \cos(nx)$ und $g_n(x) := \sin(nx)$ mit $n \geq 1$ ein Orthogonalsystem in $\mathscr{C}[-\pi, \pi]$ bilden.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $V_n \subseteq \mathscr{C}[-\pi,\pi]$ den linearen Teilraum, der von den Funktionen $f_0,\ldots,f_n$ und $g_1,\ldots,g_n$ aufgespannt wird. Betrachten Sie die Funktion $h(x) := x^2$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion

$$P_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle h, f_k \rangle}{\langle f_k, f_k \rangle} f_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle h, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} g_k(x)$$

von h auf den Teilraum V_n. Die Folge der Funktionen P_n heißt *Fourierreihe* von h.
Bemerkung: Die Funktion $P_n(x)$ ist diejenige Funktion in V_n, welche zu h den geringsten Abstand bzgl. der Norm des Skalarproduktes hat.

c) Stellen Sie mit Hilfe eines Rechners die Funktionen h und P_n für verschiedene Werte von n dar. Was vermuten Sie: Konvergiert die Folge P_n punktweise / gleichmäßig gegen h?

Aufgabe 3 Das Dirac-Delta

a) Zeigen Sie: Es gibt keine stückweise stetige Funktion $\delta : [-1,1] \to \mathbb{R}$, sodass für jede stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)\,. \tag{1}$$

b) Finden Sie eine Folge von Treppenfunktionen $\delta_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$, so dass für jede stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f(x)\,\delta_n(x) = f(0)\,.$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass es auch eine solche Folge von unendlich oft differenzierbaren Funktionen δ_n gibt.

c*) Zeigen Sie, dass es auch keine Regelfunktion $\delta : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für jede stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ Gleichung (1) gilt.