Analysis 2
8. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
30. Mai 2011

Präsenzaufgaben

Aufgabe 1 Der Raum der Treppenfunktionen

Sei $\mathcal{T}[a,b]$ der Raum aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$. Zeigen Sie: Das Integral $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ ist eine lineare Abbilung auf $\mathcal{T}[a,b]$, d.h. für alle $f,g \in \mathcal{T}[a,b]$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \big(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)\big)\,dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{R}[a,b]$ der reellen Vektorraum aller Regelfunktionen auf dem Intervall $[a,b]$. Wir statten $\mathcal{R}[a,b]$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ aus.

a) Zeigen Sie: Für alle Regelfunktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx \leq (b-a) \cdot \big\|f\big\|_\infty\ .$$

Hinweis: Sie können entweder die Monotonie des Integrals nutzen oder die Ungleichung zuerst für Treppenfunktionen zeigen.

b) Folgern Sie: Die Integral-Abbildung $\mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ ist Lipschitz-stetig.

Aufgabe 3 Das Integral von Polynomfunktionen

Wir wollen in dieser Aufgabe elementar das Integral $\int_0^a x^3 \;\; dx$ berechnen. Hierzu bezeichne $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) := x^3$.

a) Sei $0 < n \in \mathbb{N}$ fix. Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne I_k das Intervall $I_k := \big[k \cdot \frac{a}{n}, (k+1) \cdot \frac{a}{n}\big[$. Mit diesen Intervallen definieren wir eine Treppenfunktion f_n auf $[0,a]$ durch

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k \cdot \tfrac{a}{n}\right) \cdot \chi_{I_k}(x)\ .$$

Skizzieren Sie die Funktion f_n.
Zeigen Sie: Die Folge der Treppenfunktionen f_n konvergiert gleichmäßig gegen f.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

c) Berechnen Sie $\int_0^a x^3\,dx$ über die Definition des Regelintegrals.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 Konvexe Funktionen und wichtige Ungleichungen

Zeigen Sie:

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und $0 \le \lambda_1, \dots, \lambda_n \le 1$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ die sog. *Jensensche Ungleichung*

$$f\Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\Big) \le \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \, .$$

Bemerkung:

1. Die Jensensche Ungleichung lässt sich völlig analog für konvexe Funktionen (analoge Definition) auf einem Vektorraum zeigen.
2. Die Jensensche Ungleichung lässt sich als Aussage über Schwerpunkte interpretieren: Für Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eines Vektorraums V ist nämlich $\sum_k \lambda_k \, v_k$ der Schwerpunkt der Punkte v_k mit jeweiligem Gewicht λ_k.

b) Für alle $x_1, \dots, x_n \in]0, \infty[$ und $0 \le \lambda_1, \dots, \lambda_n \le 1$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ gilt

$$\prod_{k=1}^n x_k^{\lambda_k} \le \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \, . \tag{1}$$

Bemerkung: Die linke Seite der Ungleichung heißt *gewichtetes geometrisches Mittel* von $x_1, \dots, x_n$, die rechte Seite heißt *gewichtetes arithmetisches Mittel*. Für $\lambda_k = 1/n$ ergibt sich jeweils das geometrische bzw. arithmetische Mittel.

c) Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ die sog. *Höldersche Ungleichung*

$$|\langle\, v, w \,\rangle| \le \|v\|_p \cdot \|w\|_q \, .$$

Welche Ungleichung ergibt sich für $p = q = 2$?
Zur Erinnerung: $\|(v_1, \dots, v_n)\|_p = (|v_1|^p + \dots + |v_n|^p)^{1/p}$ und analog für q.
Hinweis: Betrachten Sie $x_1 := |v_k|^p \,/\, \|v\|_p^p$ und $x_2 := |w_k|^q \,/\, \|w\|_q^q$ unter Ungleichung (1).

d) Sei $p > 1$. Dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ die sog. *Minkowskische Ungleichung*

$$\|v + w\|_p \le \|v\|_p + \|w\|_p \, .$$

Bemerkung: Sie können hier nicht damit argumentieren, dass $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{C}^n$ ist, denn die Minkowskische Ungleichung wird gerade dazu genutzt, nachzuweisen, dass $\|\cdot\|_p$ die Dreiecksungleichung erfüllt (Zirkelschluss). Die Homogenität und Definitheit von $\|\cdot\|_p$ können Sie hingegen verwenden (Beweis leicht).
Hinweis: Zeigen Sie zuerst: Für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$ mit $\|v\|_p, \|w\|_p \le 1$ und $0 \le \lambda \le 1$ gilt

$$\|\lambda v + (1 - \lambda) w\|_p \le 1 \, ,$$

und folgern Sie hieraus die Minkowskische Ungleichung. Alternativ lässt sich die Minkovskische Ungleichung mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung zeigen.

Aufgabe 2 Polynom-Approximation geht besser als Taylor

Wir betrachten die Exponentialfunktion $f(x) := e^x$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ und wollen diese Funktion möglichst gut durch Polynome vom Grad kleiner gleich 3 Grad approximieren.

a) Bestimmen Sie für f das Taylorpolynom T_3 vom Grad 3 um den Punkt $x_0 = 0$. Zeichnen Sie mit Hilfe eines Rechner die Restgliedfunktion $R(x) := f(x) - T_3(x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Welche Abschätzung für den Fehler $R(x)$ liefert die Restgliedformel von Lagrange?

b) Betrachten Sie das Polynom

$$p_3(x) := 0,994571 + 0,997397 \cdot x + 0,54299 \cdot x^2 + 0,177348 \cdot x^3 \,.$$

Zeichnen Sie auch hier mit Hilfe eines Rechners das Restglied $\tilde{R}(x) := f(x) - p_3(x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$. Vergleichen Sie mit dem Restglied $R(x)$ der Taylorapproximation.

Aufgabe 3 Äquivalenzrelationen auf Regelfunktionen

Sei $\mathscr{R}[a, b]$ der reelle Vektorraum aller Regelfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$. Wir definieren eine Relation auf $\mathscr{R}[a, b]$ wie folgt: Für $f, g \in \mathscr{R}[a, b]$ sei

$$f \sim g \qquad :\Longleftrightarrow \qquad f(x) = g(x) \text{ für alle bis auf endlich viele } x \in [a, b].$$

In diesem Fall sagen wir auch f und g *stimmen fast überall überein*. Zeigen Sie:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) Die Äquivalenzklasse $[0]$ der konstanten Nullfunktion ist ein linearer Teilraum.

c) Ist $f \in \mathscr{R}[a, b]$ stetig, so enthält die Äquivalenzklasse $[f]$ nur eine stetige Funktion, nämlich f selbst.

d) Ist $f \sim g$, so gilt $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx$.

e*) Ist die Äquivalenzklasse $[0]$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathscr{R}[a, b]$ bzgl. der Supremumsnorm?