Analysis 2
7. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
23. Mai 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Hyperbelfunktionen

Die (komplexen) Hyperbelfunktionen *Sinus Hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und *Kosinus Hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind wie folgt definiert:

$$\sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2}, \qquad \cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2}.$$

a) Stellen Sie cosh und sinh als Potenzreihen um den Entwicklungspunkt 0 dar.

b) Zeigen Sie: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

c) Skizzieren Sie die Funktionen cosh und sinh für reelle Werte unter Benutzung von Symmetrieeigenschaften und dem Verhalten für $x \to \pm\infty$.

d) Bestimmen Sie die Ableitung von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass sinh auf ganz $\mathbb{R}$ und cosh auf $[0, \infty[$ streng monoton steigend ist. Die Umkehrfunktionen werden mit $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $\operatorname{arcosh} : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ bezeichnet.

e) Bestimmmen Sie die Ableitungen von arsinh und arcosh.

f) Zeigen Sie: Für $z \in \mathbb{C}$, $x \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\sinh z + \cosh z)^n = \sinh(nz) + \cosh(nz), \qquad \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Aufgabe 2 L'Hospital

Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regeln von L'Hospital ($a \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cosh x}{1 - \cos x}, \qquad \lim_{x \searrow 0} x \ln x, \qquad \lim_{x \to \infty} (1 + \tfrac{a}{x})^x.$$

Aufgabe 3 Kurvendiskussion am Beispiel Entropie

Betrachten Sie die Funktion

$$S : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad S(\lambda) = \begin{cases} -\lambda \ln \lambda - (1-\lambda)\ln(1-\lambda) & \text{, falls } 0 < \lambda < 1 \\ 0 & \text{, falls } \lambda = 0 \text{ oder } \lambda = 1. \end{cases}$$

Bemerkung: Für $0 \leq \lambda \leq 1$ ist $S(\lambda)$ die *Entropie* der Wahrscheinlichkeitsverteilung $(\lambda, 1-\lambda)$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion S auf $[0,1]$ stetig und auf $]0,1[$ differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremstellen der Funktion.

c) Auf welchen Teilintervallen ist die Funktion monoton wachsend bzw. monoton fallend?

Aufgabe 4 Wendepunkte und Van der Waals Gas

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Eine lokale Extremstelle der Ableitung f' heißt auch *Wendepunkt* von f. Überlegen Sie sich ggf., warum Sie das aus der Schule bekannte Verfahren zur Bestimmung von Wendepunkten benutzen können.

Die *Van der Waalsche Zustandsgleichung für reale Gase* lautet

$$(p + \tfrac{a}{V^2})(V - b) = RT \ ,$$

wobei p den Druck, V das Volumen, T die absolute Temperatur, R die allgemeine Gaskonstante und a, b Stoffkonstanten bezeichnen. Wir wollen den Druck p in Abhängigkeit vom Volumen V studieren und lösen dazu die Funktion nach p auf:

$$p = p_T(V) := \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \ .$$

Das Gas lässt sich nur für Temperaturen T, die unterhalb einer sog. *kritischen Temperatur* T_k liegen, durch steigenden Druck verflüssigen. Für $T > T_k$ bleibt das Gas auch unter beliebig hohem Druck gasförmig. Die kritische Temperatur T_k ist mathematisch dadurch bestimmt, dass die zugehörige Funktion p_{T_k} einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente besitzt (siehe Gerthsen, Physik, 5.6.4). Der Wendepunkt V_k wird *kritisches Volumen* genannt, der zugeh. Wert $p_k := p_{T_k}(V_k)$ heißt *kritischer Druck*.

Bestimmen Sie T_k, V_k und p_k in Abhängigkeit der Konstanten a, b und R.

Hausübungen

Aufgabe 1 Lemma von Darboux

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für jeden Wert $c \in \mathbb{R}$ mit $f'(a) < c < f'(b)$ gibt es eine Stelle $a < \xi < b$ mit $f'(\xi) = c$.

Kleine Zusatzaufgabe: Sie haben bereits gesehen, dass die Ableitung differenzierbarer Funktionen i.A. nicht stetig ist. Welche Art von Unstetigkeit kann nach dem obigen Satz nicht auftreten?

Aufgabe 2 Wie bestimmt man Taylorpolynome?

Bestimmen Sie für die folgende Funktion das Taylorpolynom der Ordnung 6 im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1}{1-x^2} .$$

Aufgabe 3 Funktion vs. Taylorreihe

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{, falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{, falls } x = 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te Ableitung von f auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ von der Form

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \cdot f(x)$$

mit geeigneten Polynomen p_n und q_n hat.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Taylorreihe gegen f?

Aufgabe 4 Konvexe Funktionen

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) . \tag{1}$$

Mittels vollständiger Induktion zeigt man leicht, dass eine Funktion genau dann konvex ist, wenn für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ und alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ gilt:

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) .$$

a) Wie können Sie anhand des Funktionsgraphen erkennen, ob eine Funktion konvex ist? Veranschaulichen Sie dazu Ungleichung (1) anhand des Funktionsgraphen, indem Sie x und y festhalten und λ variieren.

b) Welche der folgenden Funktionen sind konvex (ohne Nachweis)? Geben Sie bei den nicht konvexen Funktionen jeweils Punkte $x, y \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ an, die Ungleichung (1) verletzen.

$$f(x) = x , \quad f(x) = x^2 , \quad f(x) = x^3 , \quad f(x) = e^x , \quad f(x) = |x| \quad f(x) = x + |x| .$$

c) Zeigen Sie: Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

i. f ist konvex.

ii. Die Ableitung f' ist monoton wachsend.

Hinweis: Für beide Implikationen ist eine gute Skizze (vgl. erster Aufgabenteil) sehr hilfreich. Für die Implikation c)i. $\Longrightarrow$ c)ii. sehen Sie dort für $x < y$, welche Steigung zwischen $f'(x)$ und $f'(y)$ liegt. Versuchen Sie für die Implikation c)ii. $\Longrightarrow$ c)i. einen Widerspruchsbeweis. Dort hilft der Mittelwertsatz weiter.

Aufgabe 5 Binomische Reihe

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir den Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} & \text{, falls } n \neq 0 \\ 1 & \text{, falls } n = 0. \end{cases}$$

Machen Sie sich klar, dass für eine natürliche Zahl $\alpha \geq k$ diese Definition mit dem bereits bekannten Binomialkoeffizienten $\frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!}$ übereinstimmt.

a) Zeigen Sie mittels der Approximation durch eine Taylorreihe: Für alle $0 \leq x < 1$ gilt:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \,. \tag{2}$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass Gleichung (2) auch für $-1 < x \leq 0$ gilt.

b) In der Relativitätstheorie wird die Gesamtenergie eines Teilchens der Ruhemasse m_0 und der Geschwindigkeit v gegeben durch

$$E(v) = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \,,$$

wobei c die konstante Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Entwickle $E(v)$ in eine Potenzreihe um $v_0 = 0$. Für Physik-Interessierte: Was ist die physikalische Bedeutung der ersten beiden Terme?