Analysis 2
6. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
16. Mai 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Links- und rechtsseitige Ableitung

Zeigen Sie: Sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Für $a \leq x < b$ bzw. $a < x \leq b$ heißen die Grenzwerte

$$f'_-(x) := \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad \text{bzw.} \qquad f'_+(x) := \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

die *links*- bzw. *rechtsseitige Ableitung* an der Stelle x. Zeigen Sie: Für $a < x < b$ sind äquivalent:

a) Die links- und rechtsseitige Ableitungen $f'_-(x)$ und $f'_+(x)$ an der Stelle x existieren und stimmen überein.

b) f ist in x differenzierbar.

Aufgabe 2 Umkehrfunktionen von Sinus und Kosinus

a) Zeigen Sie:

1. Der Sinusfunktion ist auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton steigend.
2. Der Kosinusfunktion ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend.

Insbesondere sind Sinus und Kosinus auf den entsprechenden Intervallen invertierbar.

b) Die entstehenden Umkehrfunktionen heißen Arkussinus bzw. Arkuskosinus:

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], \qquad \arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi].$$

Bestimmen Sie deren Ableitungen.

Aufgabe 3 Lipschitzstetigkeit

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt *Lipschitz-stetig*[1], falls es eine Konstante $L > 0$ gibt mit

$$\left\| f(x) - f(y) \right\| \leq L \cdot \left\| x - y \right\|$$

für alle $x, y \in D$. Die Konstante L heißt dann auch *Lipschitz-Konstante* von f.

a) Finden Sie 2 Lipschitz-stetige Funktionen und 2 nicht Lipschitz-stetige Funktionen.

b) Zeigen Sie: Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

c) Zeigen Sie: Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und f stetig differenzierbar, so ist f Lipschitz-stetig.

d) Zeigen Sie: Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist Lipschitz-stetig.
Hinweis: U.U. könnte die Cauchy-Schwarz-Ungleichung sehr nützlich sein.

[1] benannt nach dem deutschen Mathematiker Rudolf Lipschitz (1832 – 1903)

Hausübungen

Aufgabe 1 Ableitung auf endlichen Teilräumen

a) Betrachten Sie den Vektorraum $\mathscr{P}_5$ der Polynomfunktionen $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad kleiner gleich 5. Betrachten Sie den Ableitungsoperator auf diesem Raum $D : \mathscr{P}_5 \to \mathscr{P}_5,\ p \mapsto p'$.

   1. (ohne Punkte) Machen Sie sich klar, die Ableitung eines Polynoms $p \in \mathscr{P}_5$ liefert wieder ein Polynom in $\mathscr{P}_5$. D.h. die Einschränkung $D : \mathscr{P}_5 \to \mathscr{P}_5$ ist wohldefiniert.

   2. Geben Sie eine Basis des Vektorraums $\mathscr{P}_5$ an und bestimmen Sie die Matrix von D bzgl. dieser Basis. Ist die Matrix invertierbar?

b) Betrachten Sie nun den Vektorraum $\mathscr{E}_5$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = p(x) \cdot \exp(x)$ mit einer Polynomfunktion $p \in \mathscr{P}_5$.

   1. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f \in \mathscr{E}_5$ die Ableitung f' wieder in $\mathscr{E}_5$ liegt. D.h. die Einschränkung des Ableitungsoperators $D : \mathscr{E}_5 \to \mathscr{E}_5,\ f \mapsto f'$ ist wohldefiniert.

   2. Geben Sie eine Basis von $\mathscr{E}_5$ an und bestimmen Sie die Matrix von D bzgl. dieser Basis. Ist die Matrix invertierbar?

Aufgabe 2 Äquivalenz von Normen

Ist E ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf E, so heißen diese Normen *äquivalent*, wenn es Konstanten $m, M > 0$ gibt mit

$$m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M \cdot \|x\|_1\,. \tag{1}$$

Machen Sie sich klar, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf E gegeben ist. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

a) Seien auf E die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent. Zeigen Sie: Eine Folge $(x_n)_n$ ist genau dann in $(E, \|\cdot\|_1)$ konvergent, wenn sie auch in $(E, \|\cdot\|_2)$ konvergent ist. Folgern Sie, dass die Identitäts-Abbildung $(E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2),\ x \mapsto x$ stetig ist.

b) Zeigen Sie: Auf $\mathbb{R}^n$ sind die 1-Normen und die euklidische Norm

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|\,, \qquad \|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

   äquivalent. Hinweis: Es genügt, die Ungleichungen in (1) für Einheitsvektoren bzgl. einer der Normen zu zeigen. Schreiben Sie $\|x\|_1$ als Skalarprodukt.

c) Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Es bezeichne $\|x\|_1$ wie zuvor die 1-Norm auf $\mathbb{R}^n$. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

   1. Es gibt eine Zahl $M > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|x\| \leq M \cdot \|x\|_1$. Hinweis: Stellen Sie x in der kanonischen Basis dar.

   2. Die Funktion $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \|x\|$ ist stetig, und die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$ ist kompakt bzgl. $\|\cdot\|_1$.

   3. Es gibt eine Zahl $m > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $m \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|$.

Mündliche Hausübung

Aufgabe 3 Stetig, aber nirgends differenzierbar

Sei s diejenige Funktion, die jeder reellen Zahl x deren Abstand zur nächstgelegenen durch 4 teilbaren ganzen Zahl zuweist, also z.B.

$$s(5.8) = 1.8\,, \qquad s(-8) = 0\,, \qquad s(2.4) = 1.6\,.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$s_k(x) := \frac{s(4^k x)}{4^k}\,.$$

a) Skizziere Sie die Funktion $s = s_0, s_1, s_2, s_3$. Auf welchen Intervallen ist s_k jeweils affin linear?

b) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} s_k(x)$ konvergiert.

c) Zeigen Sie, dass f an keiner Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.
Hinweis: Fixieren Sie $x \in \mathbb{R}$. Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $h_n \in \mathbb{R}$ mit:

1. Für $k > n$ ist $s_k(x + h_n) = s_k(x)$.
2. Für $k \le n$ ist $s_k(x + h_n) = s_k(x) \pm h_n$.

Argumentieren Sie hierbei ggf. anhand Ihrer Skizze und nicht zu formal. Betrachten Sie nun die Differenzenquotienten der so entstehenden Folge $(h_n)_n$.

Freiwillige Zusatzaufgabe

Aufgabe 4 Nicht Äquivalenz von Normen

Wir betrachten den Funktionenraum

$$\begin{aligned}\mathscr{C}^1[0,1] \quad := \quad & \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig, } f :]0,1[\to \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar und die} \\ & \text{Ableitung } f' \text{ kann stetig auf das Intervall } [0,1] \text{ fortgesetzt werden.}\}\end{aligned}$$

Dieser Raum ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, das müssen Sie nicht zeigen. (Warum wäre das nicht schwer?) Auf diesem Raum betrachten wir nun zwei Normen, zum einen die bekannte Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und zum anderen die Norm

$$\|f\|^1 := |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|^1$ positiv definit ist, also aus $\|f\|^1 = 0$ bereits $f = 0$ folgt.

Mit bloßem Auge sollten Sie sehen können, dass $\|\cdot\|^1$ alle weiteren Eigenschaften einer Norm erfüllt. Falls Ihnen das nicht klar ist, sollten Sie das nachrechnen.
Aus einem Satz der Vorlesung folgt, dass $(\mathscr{C}^1[0,1], \|\cdot\|^1)$ ein Banachraum ist. Wir wollen nun untersuchen, ob die beiden Normen auf diesem Raum äquivalent sind.

(b) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $M > 0$ gibt, mit $\|f\|_\infty \le M \cdot \|f\|^1$ für alle $f \in \mathscr{C}^1[0,1]$.

(c) Zeigen Sie, dass $(\mathscr{C}^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ nicht vollständig ist und folgern Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|^1$ auf $\mathscr{C}^1[0,1]$ nicht äquivalent sein können.

(d) Folgern Sie, dass die Identitätsfunktion $\Phi : (\mathscr{C}^1[0,1], \|\cdot\|^1) \to (\mathscr{C}^1[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, $\Phi(f) := f$ zwar bijektiv und stetig ist, die Umkehrabbildung aber nicht stetig ist.

(e) Die Einheitskugel in $(\mathscr{C}^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ ist abgeschlossen und beschränkt. Ist sie kompakt?

Hinweis: Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung kann bei verschiedenen Teilaufgaben nützlich sein.