Analysis 2
5. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
9. Mai 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Ableitung eines Monoms

Zeigen Sie mit Hilfe der Differenzenquotienten, dass die Funktion $f(x) = x^3$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung f' der Funktion.

Aufgabe 2 Ableitung der Betragsfunktion

Bestimmen Sie mit Hilfe der Differenzenquotienten die Punkte $x \in \mathbb{R}$, auf welcher die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ differenzierbar ist und berechnen Sie dort deren Ableitung f'.

Aufgabe 3 Ableitungen gängiger Funktionen

In den Hausübungen dieses Übungsblattes werden wir zeigen, dass $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ auf ganz $\mathbb{R}$ (sogar ganz $\mathbb{C}$) gilt. Verwenden Sie die Ableitungsregeln und den Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion, um folgende Funktionen zu differenzieren:

(a) $a(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $0 \leq i \leq n$ und $a_n \neq 0$.

(b) $b(x) = \sum_{k=-N}^{n} a_k \cdot x^k$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $-N \leq i \leq n$.

(c) $c(x) = \ln(x^2)$ für $x > 0$.

(d) $d(x) = \exp(-x^2)$.

(e) $e(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$.

(f) $f(x) = \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in \{y \in \mathbb{R} : \cos(y) \neq 0\}$.

(g) $g(x) = \exp(\sin(x) + x^{42})$.

(h) $h(x) = x^a$ für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.

(i) $i(x) = a^x$ für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

(j) $j(x) = x^x$ für $x > 0$.

Aufgabe 4 Diskussion eines alternativen Beweises der Quotientenregel

Diskutieren Sie folgende Beweisidee der Quotientenregel:
Ist f eine auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion ohne Nullstelle, so ist $\frac{f}{f}$ eine konstante Funktion. Also gilt

$$0 = \left(\frac{f}{f}\right)' = \left(\frac{1}{f}\right)' \cdot f + f' \cdot \frac{1}{f}.$$

Also folgt

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Aufgabe 5 Logarithmische Ableitung

Sei $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass für die *logarithmische Ableitung* gilt:

$$(\ln(f))' = \frac{f'}{f}.$$

Hausübungen

Aufgabe 6 Abstandsfunktionen und Lotpunkte

Es sei A eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{K}^n$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir definieren die *Abstandsfunktion*

$$d_A(x) := \inf_{a \in A} \{\|x - a\|_2\} .$$

Machen Sie sich zunächst klar, dass wir $d_A(x)$ zu Recht als Abstand von x zu A bezeichnen.
Zeigen Sie folgende Behauptungen:

(a) Ist A abgeschlossen, so gibt es zu jedem Punkt $x \in \mathbb{K}^n$ einen Punkt $a \in A$ mit $d_A(x) = \|x - a\|_2$. Der Abstand wird also konkret realisiert. In diesem Fall nennen wir dieses $a \in A$ einen *Lotpunkt* für $x \in \mathbb{K}^n$.

(b) Geben Sie eine nicht leere konvexe Menge A an, so dass für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ kein Lotpunkt $a \in A$ existiert.
Geben Sie eine nicht leere und abgeschlossene Menge B an, so dass es für ein $x \in \mathbb{R}^2$ mehr als einen Lotpunkt in B gibt.

(c) Für ein Element $x \in \mathbb{K}^n$ gilt genau dann $d_A(x) = 0$, wenn x ein Element aus $\overline{A}$ ist.

(d*) Erhielten wir die gleichen Resultate, wenn wir $\|\cdot\|_2$ durch $\|\cdot\|_\infty$ oder $\|\cdot\|_1$ ersetzten? Woran könnte das liegen?

Aufgabe 7 Die Ableitung der Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen

Ist $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion, so schreiben wir

$$g = \lim_{z \to z_0} f(z),$$

wenn für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$ gilt: $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = g$.

(a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1.$$

(b) Folgern Sie mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, dass $\exp' = \exp$ gilt.

(c) Folgern Sie aus (a) die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0,\ x \in \mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0,\ x \in \mathbb{R}} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0,$$

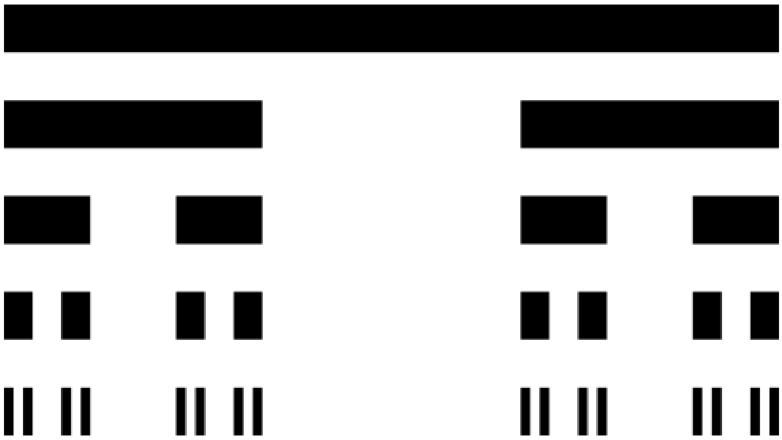
indem Sie das Resultat aus (a) auf einer geschickten Ursprungsgrade in $\mathbb{C}$ betrachten und die Stetigkeit des Realteils und Imaginärteils ausnutzen.

(d) Folgern Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus abschließend:

$$\sin' = \cos \quad \text{und} \quad \cos' = -\sin .$$

Aufgabe 8 Die Cantormenge

Die Cantor Menge $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{R}$ wird folgendermaßen konstruiert:
Wir starten mit dem Intervall $\mathscr{C}_0 := [0,1]$. Um aus $\mathscr{C}_0$ die Menge $\mathscr{C}_1$ zu erhalten, entfernen wir das offene mittlere Drittel, also $\mathscr{C}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Somit ist $\mathscr{C}_1$ die disjunkte Vereinigung von $2^1 = 2$ abgeschlossenen Intervallen.
Angenommen, wir haben $\mathscr{C}_n$ konstruiert. Dann besteht $\mathscr{C}_n$ aus 2^n disjunkten abgeschlossenen Intervallen. Aus jedem dieser Intervalle entfernen wir das mittlere offene Drittel.



Dieses Bild illustriert die Konstruktion von $\mathscr{C}_0 \supseteq \mathscr{C}_1 \supseteq \mathscr{C}_2 \supseteq \mathscr{C}_3 \supseteq \mathscr{C}_4$.
Wir erhalten dadurch eine Folge $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Mengen mit $\mathscr{C}_{n+1} \subseteq \mathscr{C}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Die *Cantor Menge* ist nun der Durchschnitt

$$\mathscr{C} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{C}$ eine kompakte Menge ist, unendlich viele Elemente enthält und bestimmen Sie das Innere von $\mathscr{C}$, sowie den Rand von $\mathscr{C}$.

Für eine nicht leere Menge M bezeichne $M^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in M$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die ursprünglich von Cantor gegebene Definition der Menge $\mathscr{C}$ war eine andere: Er setzte

$$\widehat{\mathscr{C}_m} := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} : \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} : 1 \notin \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \right\}$$

und definierte $\mathscr{C}$ als den Schnitt der Mengen $\widehat{\mathscr{C}_n}$.

(b*) Machen Sie sich klar, dass $\mathscr{C}_n = \widehat{\mathscr{C}_n}$ für alle $n > 0$ gilt. Widerspricht dies der Beobachtung, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = 1$ und $x_n = 0$ für $n \neq 1$ über $\frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ die Zahl $\frac{1}{3}$ beschreibt, $\frac{1}{3} \in \mathscr{C}_1$ gilt, aber $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine erlaubte Wahl einer Folge in $\widehat{\mathscr{C}_1}$ ist?

(c*) Geben Sie analog der Darstellung $\mathscr{C}_m = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} : \ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} : 1 \notin \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \right\}$ eine Darstellung der Cantormenge $\mathscr{C}$ an.

(d*) Zeigen Sie, dass es eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathscr{C} \to [0,1]$ gibt.