Analysis 2
4. Übung

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
2. Mai 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Potenzreihen am Rand

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren jeweils die folgenden Potenzreihen?

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} .$$

Aufgabe 2

Sei X ein metrischer Raum.

a) Zeigen Sie: Endliche Vereinigungen kompakter Mengen sind kompakt. D.h., sind $A, B \subseteq X$ kompakt, so ist auch $A \cup B$ kompakt.

b) Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die Vereinigung unendlich vieler kompakter Mengen i.A. nicht kompakt ist.

Aufgabe 3 Rand und Inneres

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$, und geben Sie jeweils das Innere, den Rand, die Häufungspunkte und die isolierten Punkte an:

a) $\{a + ib \in \mathbb{C} : -1 < a \leq 2,\ 1 \leq b < 3\}$,

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{0\}$,

c) $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}$,

d) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$,

e) $\{z \in \mathbb{C} : z \neq 0,\ |z| \leq 1\}$,

f) $\{a + ib : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Hausübungen

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x \cdot \sin(1/x)$.

a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von f.

b) Zeigen Sie: Die Funktion f lässt sich stetig nach 0 fortsetzen, d.h., der Grenzwert $f(0) := \lim_{x\to 0} f(x)$ existiert.

c) Zeigen Sie: Die Funktion f lässt sich nicht in eine Potenzreihe entwickeln. D.h., es gibt keine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < R$.

d) Die Funktion f lässt sich durch $\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(z) := z \cdot \sin(1/z)$ ins Komplexe fortsetzen. Zeigen Sie: Die Funktion $\tilde{f}$ lässt sich nicht stetig nach 0 fortsetzen.

Aufgabe 2

Sei X ein metrischer Raum und $B \subseteq X$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) B ist kompakt.

b) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine (u.U. unendliche) Familie abgeschlossener Teilmengen $A_i \subseteq X$, für welche jeder **endliche** Schnitt $B \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}$ $(i_1, \ldots, i_n \in I)$ nicht leer ist, dann ist auch der Schnitt $B \cap \bigcap_{i \in I} A_i$ nicht leer.

Aufgabe 3

Wir haben uns im letzten Semester bereits mit der Folge der Zahlen $(1 + \frac{1}{n})^n$ beschäftigt. Dort haben wir gesehen, dass sie monoton wachsend und beschränkt ist. Also konvergiert sie. Völlig analog konvergiert für $x \geq 0$ die Folge $a_n := (1 + \frac{x}{n})^n$. Aber wogegen?

Sei $x \geq 0$ fix. Zeigen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)\ .$$

Insbesondere folgt damit

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \tfrac{1}{n})^n = e\ .$$

Hinweis: Sie können dafür zuerst folgende Teilaussagen zeigen:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{k!}\ .$$

b) Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei

$$b_n^{(m)} := \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\ .$$

Dann gilt für alle alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$:

$$b_n^{(m)} \leq b_n^{(n)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\ .$$