Analysis 2
3. Übung

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
25. April 2011

Hausaufgabenblatt

Da am Ostermontag keine Übungen statt finden, stellen wir in dieser Woche ein Hausaufgabenblatt zur Bearbeitung zu Verfügung. Die ersten drei Aufgaben sind Hausübungen, die für den Bonus relevant sind. Die vierte Aufgabe ist eine mündliche Hausübung, die Sie für die Übung in der Woche nach Ostern vorbereiten sollen, damit Sie diese mit Ihrem Tutor besprechen können.

Aufgabe 1 Konvergenzradien

Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

$$\begin{array}{llll} (a) & \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}, & (b) & \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{z^n}{n}, \\ (c) & \sum_{n=0}^{\infty} z^{(n^2)}, & (d) & \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot z^n. \end{array}$$

Aufgabe 2 Potenzreihen

Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1) \cdot z^n.$$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe.

(b) Invertieren Sie die Potenzreihe mit Hilfe des Cauchy Produkts: Finden Sie eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$, deren Produkt mit obiger Potenzreihe die Potenzreihe der konstanten Funktion $e(z) = 1 = 1 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + ...$ ergibt.

(c) Welche Funktion f wird also von obiger Reihe auf ihrem Konvergenzgebiet dargestellt? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Ihren Rechnungen für Übung 14 aus Analysis I.

Aufgabe 3 Supremumsnorm

Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Aus der Vorlesung kennen Sie für eine beliebige nicht leere Menge X den Raum der beschränkten Funktionen auf X mit Werten in E:

$$B(X,E) := \left\{ f : X \to E,\ f \text{ beschränkt} \right\}.$$

Weiter wurde für ein Element dieses Raums $f \in B(X,E)$ die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ definiert via

$$\left\| f \right\|_\infty := \sup \left\{ \left\| f(x) \right\| :\ x \in X \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B(X,E)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $B(X,E)$ ist.

Wir betrachten nun folgenden Spezialfall des Vektorraums der beschränkten stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{C}_b(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} :\ f \text{ ist stetig und beschränkt.} \} \subseteq B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

mit Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Wir definieren weiter für Funktionen $f, g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ die *adjungierte Funktion* $f^* \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ mit Hilfe der komplexen Konjugation durch

$$f^*(x) := \overline{f(x)}$$

und das Produkt $f \cdot g$ der Funktionen punktweise durch

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Adjunktion bzw. die Supremumsnorm folgende Eigenschaften hat: Für $f, g \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ gilt:

$$\left\| f \cdot g \right\|_\infty \leq \left\| f \right\|_\infty \cdot \left\| g \right\|_\infty, \quad (f^*)^* = f, \quad \left\| f^* \right\|_\infty = \left\| f \right\|_\infty \quad \text{und} \quad \left\| f \cdot f^* \right\|_\infty = \left\| f \right\|_\infty^2.$$

(c) Sind $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ konvergent bezüglich der Supremumsnorm gegen Grenzfunktionen f bzw. g, so konvergiert die Produktfolge $(f_n \cdot g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f \cdot g$.

(d) Wäre die Aussage aus (c) noch richtig, wenn $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen stetiger aber unbeschränkter Funktionen auf $\mathbb{R}$ wären, die gleichmäßig gegen nicht notwendigerweise beschränkte Grenzfunktionen f bzw. g konvergierten?

Bemerkung: Aus der Vorlesung wissen wir, dass $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R}),\ \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist. Ergänzen wir dies mit den Resultaten dieser Aufgabe, so haben wir im Teil (b) gezeigt, dass $(\mathscr{C}_b(\mathbb{R}),\ \|\cdot\|_\infty)$ eine involutive Banachalgebra ist: Die Norm ist submultiplikativ und die Adjunktion ist eine isometrische, d. h. normerhaltende, Involution. Weiter erfüllt die Norm die C*-Eigenschaft:

$$\left\| f \cdot f^* \right\| = \left\| f \right\|^2$$

für alle $f \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$. Solche Algebren heißen C*-Algebren und die beschränkten stetigen komplexwertigen Funktionen auf einer abgeschlossenen Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ stellen prominente Vertreter kommutativer C*-Algebren dar.

Mündliche Hausübung: Fibonacci Zahlen und Potenzreihen

Wir erinnern an die Fibonacci Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche durch die Rekursionsvorschrift

$$f_0 := 1,\ f_1 := 1, \quad f_{n+2} := f_n + f_{n+1}$$

definiert war. Wir betrachten die Potenzreihe

$$F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^n.$$

(a) Wenn R den Konvergenzradius der Reihe bezeichnet, warum gilt sicher $R \leq 1$?

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe.

Hinweis: In Analysis I haben Sie sich schon mehrfach mit der Fibonacci Folge beschäftigt.

(c) Zeigen Sie folgende Identität für $|z| < R$: $F(z) - z \cdot F(z) - z^2 \cdot F(z) = 1$. Folgern Sie daraus einen geschlossenen Ausdruck für die Funktion F als gebrochen rationale Funktion.

(d) Bestimmen Sie die beiden (reellen) Nullstellen des Nenners z_1 und z_2 von F mit $z_1 < z_2$ und zeigen Sie:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{z_2 - z} - \frac{1}{z_1 - z} \right).$$

(e) Zeigen Sie: Für $|z| < R$ gilt:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z_1^{n+1}} - \frac{1}{z_2^{n+1}} \right) \cdot z^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right) \cdot z^n. \end{aligned}$$

(f) Leiten Sie aus den Resultaten von (a) bis (e) eine explizite Formel für die n-te Fibonacci Zahl f_n her.