Analysis 2
2. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
18. April 2011

Anwesenheitsübungen

Aufgabe 1 Zum Warmwerden

Zeigen Sie: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)\ .$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig sind:

a) $f(x, y) := x^2 + y^2$,

b) $f(x, y) := x + y$,

c) $f(x, y) := x \cdot y$,

d) $f(x, y) := x^2 \cdot \sin(y)$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) := \sqrt[n]{x}$.

a) Skizzieren Sie die Funktionen f_n für verschiedene Werte von n.

b) Ist die Folge punktweise konvergent, ist sie gleichmäßig konvergent? Geben Sie ggf. die Grenzfunktion an.

Hausübungen

Notation uneigentlicher und einseitiger Grenzwerte

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit geeignetem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir schreiben $\lim_{x \searrow 0} f(x) = g$, falls für jede Nullfolge $(x_n)_n$ in D mit $x_n > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Wir schreiben $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ (bzw. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = g$), falls für jede bestimmt divergente Folge $(x_n)_n$ in D mit $x_n > 0$ (bzw. $x_n < 0$) gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Bemerkung: Machen Sie sich klar, dass in jedem dieser Fälle o.B.d.A. angenommen werden kann, dass die Folge $(x_n)_n$ monoton wachsend bzw. fallend ist.

Aufgabe 1 Was ist 0^0 (für kleine 0)?

Wie würden Sie 0^0 definieren?

Betrachten Sie die Funktion

$$f\ :]0,\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) := x^y = \exp(y\cdot\ln x)\ .$$

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass für jedes feste $c\in\mathbb{R}$ die Funktion $]0,\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto f(c,x)=x^c$ stetig ist. Außerdem wissen Sie, dass für jedes feste $a>0$ die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y\mapsto a^y$ stetig ist.

a) Bestimmen Sie für $a>0$ bzw. $c>0$ jeweils den Grenzwert

$$\lim_{y\to 0} a^y\ , \qquad\qquad \lim_{x\searrow 0} x^c\ .$$

b) Zeigen Sie: f ist auf dem Definitionsbereich $D :=]0,\infty[\times\mathbb{R}$ stetig.

c) Lässt sich die Funktion f stetig nach $(0,0)$ fortsetzen, d.h., gibt es eine stetige Funktion $\tilde{f} : D\cup\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=\tilde{f}(x,y)$ für alle $(x,y)\in D$?

d) Sei $c>0$. Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon>0$ liegt in der ε-Umgebung von $(0,0)$ ein Punkt $(x,y)\in]0,\infty[\times\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=c$.

Finden Sie eine Folge von Punkten $(x_n,y_n)\in]0,\infty[\times\mathbb{R}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0)\ , \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}(x_n)^{y_n}=c\ .$$

Wie würden Sie 0^0 definieren?

Aufgabe 2 Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

a) Zeigen Sie: Für $a>0, a\neq 1$ ist die Funktion $\mathbb{R}\to]0,\infty[,\ t\mapsto a^t=\exp(t\cdot\ln a)$ bijektiv.
Wir bezeichnen mit $\log_a :]0,\infty[\to\mathbb{R}$ die zugehörige Umkehrfunktion und nennen $\log_a$ den *Logarithmus zur Basis* a.

b) Zeigen Sie, dass für alle $a,b,x,y>0$ und $s,t\in\mathbb{R}$ gilt:

$$a^{s+t}=a^s\cdot a^t\ , \qquad \log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y\ ,$$
$$a^{s\cdot t}=(a^s)^t\ , \qquad \log_a(x^t)=t\cdot\log_a x\ ,$$
$$(a\cdot b)^t=a^t\cdot b^t\ .$$

c) Folgern Sie die aus der Schule bekannte Rechenregel $\log_b x=\log_a x/\log_a b$.

d*) Dem Potenzgesetz auf der linken Seite entspricht jeweils dem Logarithmengesetz auf rechten Seite. Formulieren Sie für das unterste Potenzgesetz auch eine entsprechendes Logarithmengesetz.

Aufgabe 3 Wachstum von Potenzen und Logarithmus

Zeigen Sie: Für jedes $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0\ , \qquad \lim_{x\to-\infty}x^n e^x=0\ ,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0\ , \qquad \lim_{x\searrow 0}x^n\ln x=0\ .$$