Analysis 2
1. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Prof. Dr. B. Kümmerer
W. Reußwig, K. Schwieger

Fachbereich Mathematik
11. April 2011

Abgeschlossene Mengen

Wir wollen auf diesem ersten Übungsblatt der Veranstaltung den Begriff des Abschlusses nochmal aufgreifen. Dazu schauen wir uns Eigenschaften des Abschlusses auf metrischen Räumen an und werden sehen, dass wir über die Bildung des Abschlusses stetige Funktionen charakterisieren können (Aufgaben 5 und 6).

Aufgabe 1 ist eine Wiederholung aus dem letzten Semester. Die Aufgaben 2 und 3 sind schriftliche Hausübungen, die für den Bonus relevant sind und in der Woche vom 18. April bis 22. April in Ihrer Übungsgruppe zur Korrektur abgegeben werden können. Die restlichen Aufgaben sind Hausübungen, die nicht für den Bonus zur Klausur relevant sind und nicht zur Abgabe und Korrektur durch Ihren Tutor vorgesehen sind. Diese haben vertiefenden Charakter und werden in den Übungen in der Woche vom 18. April bis 22 April besprochen. Die Beschäftigung mit diesen Aufgaben lohnt sich, selbst wenn Sie diese nicht vollständig gelöst bekommen sollten.
Sie werden bemerken, dass die Aufgabe 3 zum Teil aus den Aufgaben 4 bis 6 folgt. Sie können daher Aufgabe 3 erst am Ende bearbeiten, um die Techniken des allgemeineren Rahmens zu Verfügung zu haben. Es geht natürlich auch direkt...

Wir erinnern an die Notation der Potenzmenge: Es ist $\mathscr{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X.

Weiter erinnern wir an die Definition des Abschlusses in einem metrischen Raum (X,d): Aus der Vorlesung oder der 15. Übung kennen Sie für eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X,d) die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$. Dies ist A vereinigt mit der Menge aller Häufungspunkte $x \in X$ von Folgen in A.

Aufgabe 1 Der Abschluß in metrischen Räumen I

Zeigen Sie, falls Sie das nicht bereits in Analysis I in der 15. Übung getan haben, dass für jede Menge $A \subseteq X$ die Menge $\overline{A}$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 2 Der Abschluß in metrischen Räumen II

(a) Zeigen Sie, dass $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Menge ist, die A enthält: Ist $A \subseteq B$ und B abgeschlossen, so gilt $\overline{A} \subseteq B$.

(b) Es gilt

$$\overline{A} = \bigcap \{B \in \mathscr{P}(X),\ B \text{ abgeschlossen und } A \subseteq B\}.$$

Also ist $\overline{A}$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten.

Aufgabe 3 Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für alle $A, B \in \mathscr{P}(X)$ mit $A \subseteq B$ folgt $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(b) Für alle $A, B \in \mathscr{P}(X)$ gilt $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

(c) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen in (b) keine Gleichheit gilt.

Axiome einer Abschlußfunktion

Sei X eine Menge mit Potenzmenge $\mathscr{P}(X)$. Es sei weiter eine Abbildung $\mathscr{P}(X) \ni A \to \overline{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ gegeben, welche folgende Eigenschaften habe:

(A1) Es gilt $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(A2) Für jedes $A \in \mathscr{P}(X)$ gilt $A \subseteq \overline{A}$.

(A3) Für jedes $A \in \mathscr{P}(X)$ gilt $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(A4) Für jedes $A, B \in \mathscr{P}(X)$ gilt $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Dann nennen wir $\overline{\cdot} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ *eine Abschlußfunktion* und das Paar $(X, \overline{\cdot})$ einen *topologischen Raum*[1] im Sinne von Kuratowski. Die Mengen $A \subseteq X$ mit $A = \overline{A}$ heißen *abgeschlossene Mengen*.

Aufgabe 4 Eigenschaften von Abschlußfunktionen

Sei $(X, \overline{\cdot})$ ein topologischer Raum im Sinne von Kuratowski. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für alle $A, B \in \mathscr{P}(X)$ mit $A \subseteq B$ folgt $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(b) Für alle $A, B \in \mathscr{P}(X)$ gilt $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

[1] Dies ist die Charakterisierung topologischer Räume nach K. Kuratowski. Die Standarddefinition eines topologischen Raums ist zu dieser äquivalent.

Aufgabe 5 Eigenschaften abgeschlossener Mengen

Es sei $(X, \overline{\cdot})$ ein topologischer Raum im Sinne von Kuratowski. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) Die Mengen X und $\emptyset$ sind abgeschlossen.

(b) Ist I eine Indexmenge und ist für jedes $i \in I$ eine abgeschlossene Menge $A_i \subseteq X$ gegeben, so ist auch $A := \bigcap_{i \in I} A_i$ eine abgeschlossene Menge.

(c) Sind $A_1, \ldots, A_n$ abgeschlossen, so ist auch $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ eine abgeschlossene Menge.

In einem topologischen Raum im Sinne von Kuratowski ist also jeder beliebige Schnitt abgeschlossener Mengen, jede endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen, der ganze Raum und die leere Menge stets eine abgeschlossene Menge. Abgeschlossenen Mengen haben also die gewohnten Eigenschaften bezüglich Vereinigung und Durchschnittsbildung.

(d) Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f : (X, \overline{\cdot}) \to (Y, \overline{\cdot})$ zwischen zwei topologischen Räumen folgende Aussagen äquivalent sind:

  (i) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge unter f ist wieder abgeschlossen.

  (ii) Für jede Menge $A \subseteq X$ gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Wir nennen eine Funktion $f : (X, \overline{\cdot}) \to (Y, \overline{\cdot})$ *stetig*, wenn sie diese äquivalenten Bedingungen erfüllt.
Definieren wir eine Teilmenge von X als *offen*, wenn sie das Komplement einer in X abgeschlossenen Menge ist, so ist die Stetigkeit einer Funktion f übrigens äquivalent dazu, dass das Urbild jeder offenen Mengen wieder offen ist.

Aufgabe 6 Metrische Räume sind topologische Räume

Seien $(X, d), (X_1, d_1)$ und (X_2, d_2) metrische Räume und sei $\overline{\cdot}$ der Abschluß im üblichen Sinne der Vorlesung (vgl. Einleitung, vorletzter Abschnitt).

(a) Zeigen Sie, dass $(X, \overline{\cdot})$ ein topologischer Raum im Sinne von Kuratowski ist.

(b) Eine Funktion $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ ist genau dann stetig, wenn sie stetig im Sinne obiger Definition ist.

Aufgabe 7 Es gibt mehr topologische Räume als metrische Räume

Finden Sie auf der Menge $X = \{1, 2\}$ eine Abschlußfunktion, so dass es keine Metrik auf X gibt, welche Ihre Abschlußfunktion realisiert.