§3

3.1 Differentialrechnung

$f: D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$, falls Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{existiert.}$$

Umkehrfunktion: Ist $f: D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und $f'(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in D$, so ist die Umkehrabbg. f^{-1} differenzierbar in $y_0 = f(x_0) \in f(D)$ mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Mittelwertsatz: $f: D \to \mathbb{R}$ diff.bar und $[a,b] \subseteq D$.

$$\Rightarrow \quad (\exists x \in (a,b)) \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x)$$

Kurvendiskussion:

$f: D \to \mathbb{R}$ diff.bar und x_0 ist lokales Min./Max. im Inneren von D

$\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$

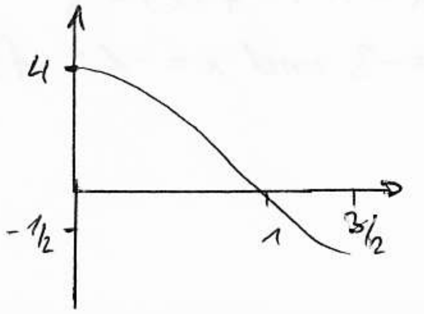
$f: D \to \mathbb{R}$ zweimal diff.bar und $f'(x_0) = 0$ für $x_0 \in D$

$\Rightarrow$ aus $f''(x_0) > 0$ folgt x_0 lokales Min.

aus $f''(x_0) < 0$ folgt x_0 lokales Max.

Aufgabe A1:

a) $D_f = [0, \frac{3}{2}]$



b) Sei $x_2 > x_1 \in D_f$.

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - 1)(x_1^2 - 4) - (x_2^2 - 1) \cdot (x_2^2 - 4)$$

$$> [(x_1^2 - 1) - (x_2^2 - 1)] \cdot (x_1^2 - 4)$$

$$> \underbrace{(x_1^2 - x_2^2)}_{< 0} \underbrace{(x_1^2 - 4)}_{< 0} > 0$$

$\Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$

c) $D_{f^{-1}} = f(D_f) \underset{\text{Monotonie}}{=} [f(3/2), f(0)] = [-1/2, 4]$

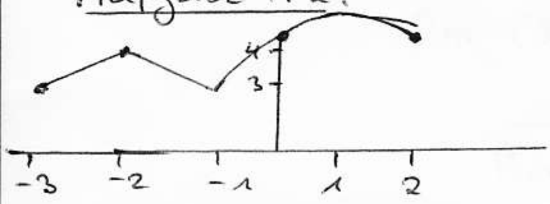
$f^{-1}(D_{f^{-1}}) = D_f = [0, 3/2]$

d) $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ mit $y_0 = 0$ und $f^{-1}(0) = 1$.

$f'(x) = 2x(x^2-4) + 2x(x^2-1) = 2x(2x^2-5)$

$\Rightarrow (f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(1)} = \cancel{\dfrac{1}{2+2-5}} = \dfrac{1}{2(2-5)} = -1/6$

Aufgabe A2:



Funktion auf $[-3,2]$ stetig, wegen $\lim\limits_{x \nearrow -1} f(x) = 3 = \lim\limits_{x \searrow -1} f(x)$.

Aber in $x=-2$ und $x=-1$ nicht differenzierbar, denn

$(4-x+2)' = -1$ und $(-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2})'\big|_{x=-1} = (-x+1)\big|_{x=-1} = 2$ und ~~[illegible]~~

$(4+x+2)' = 1$.

$\Rightarrow f'(x) \neq 0$ in $(-3,-1) \setminus \{-2\}$

Sei $x \in (-1,-2)$: $f'(x) = -x+1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f''(x) = -1 < 0$

$\Rightarrow f(x)$ hat in $x=1$ lokales Maximum: $f(1) = 5$.

Es bleiben noch 4 weitere Punkte einzeln zu untersuchen:

2 Randpunkte: $x = -3, 2$

2 "nicht-diffbare" Punkte: $x = -2, -1$

$\Rightarrow f(-3) = 3$, $f(-2) = 4$, $f(-1) = 3$ und $f(2) = 4$

$\Rightarrow$ Globales Maximum in $x=1$: $f(1) = 5$

Globale Minima in $x=-3$ und $x=-1$: $f(-3) = f(-1) = 3$

3.2 Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

i) F Stammfunktion von f, d.h. $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ii) Umgekehrt ist $F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $x \in [a,b]$, eine Stammfunktion von f.

Integrationstechniken:

- Partielle Integration: $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar

$$\Rightarrow \int f'(x) g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x) g'(x)\,dx$$

- Substitution:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \underset{\substack{y = g(x) \\ dy = g'(x)\,dx}}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

Uneigentliche Integrale:

Polstelle des Integranden oder unbeschränktes Integrationsgebiet.

$$\int_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Aufgabe A3:

$$\int_1^2 x^3 \ln(x)\,dx = \frac{1}{4} x^4 \ln(x) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{4} x^3\,dx = 4\ln(2) - \left[\frac{1}{16} x^4\right]_1^2$$

$$= 4\ln(2) - \frac{1}{16}(16 - 1) = 4\ln(2) - 15/16.$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x^2} e^{-1/x}\,dx \underset{y = -\frac{1}{x},\ dy = \frac{1}{x^2}\,dx}{=} \int_{-2}^{-1} e^y\,dy = e^y \Big|_{-2}^{-1} = e^{-1} - e^{-2}.$$

$$\int_0^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx \overset{\substack{y=x^2+3x+5\\ dy=(2x+3)dx}}{=} \int_5^{23} \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \left[2\sqrt{y}\right]_5^{23} = 2(\sqrt{23}-\sqrt{5}).$$

Aufgabe A4:

$$\int_e^{e^5} \frac{\ln x}{x}\,dx \overset{\substack{y=\ln x\\ dy=\frac{1}{x}dx}}{=} \int_1^5 y\,dy = \frac{y^2}{2}\Big|_1^5 = \frac{1}{2}(25-1) = 12$$

$$\int_0^2 \cos\sqrt{x}\,dx \overset{\substack{y=\sqrt{x}\\ dy=\frac{1}{\sqrt{x}}dx}}{=} \int_0^{\sqrt{2}} y\cos y\,dy = y\cdot\sin y\Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \sin y\,dy$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sin\sqrt{2} + \cos\sqrt{2} - 1.$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{\substack{\sin y = x\\ \cos y\,dy = dx}}{=} \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\cos y}\cdot\cos y\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2 y\,dy$$

$$= \underbrace{\cos y\cdot\sin y\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \sin^2 y\,dy = \ldots ?$$

aber: $$2\int_0^{\pi/2} \cos^2 y\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2 y\,dy + \int_0^{\pi/2} \sin^2 y\,dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} 1\,dy = \pi/2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/4$$

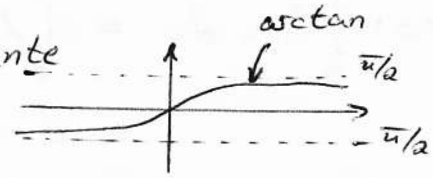
$$\int_1^2 \sin(\ln x)\,dx = \int_1^2 1\cdot\sin(\ln x)\,dx = \underbrace{x\cdot\sin(\ln x)\Big|_1^2}_{2\cdot\sin(\ln 2)} - \int \frac{x\cdot\cos(\ln x)}{x}\,dx$$

$$= 2\cdot\sin(\ln 2) - \underbrace{x\cdot\cos(\ln x)\Big|_1^2}_{2\cdot\cos(\ln 2)-1} - \int \frac{x\cdot\sin(\ln x)}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \sin(\ln x)\,dx = \sin(\ln 2) - \cos(\ln 2) + 1/2.$$

Aufgabe A5:

a) $\left|\frac{\arctan x}{x^2}\right| \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$ ← Majorante



$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx \le \frac{\pi}{2}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{b}\right) \underset{\lim_{b\to\infty}}{=} \pi/2$$

nach Vergleichskriterium konvergiert also obiges Integral.

b) 1. Ansatz: abschätzen

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \le \underbrace{\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x}}\,dx}_{\text{Majorante}} = \int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1.$$

nach Vergleichskriterium konvergiert das Integral.

2. Ansatz: ausrechnen

$$\int_0^b \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \underset{\substack{y=e^x\\ dy=e^x dx}}{=} \int_1^{e^b}\frac{1}{1+y^2}\,dy = \arctan y\Big|_1^{e^b}$$

$$= \arctan e^b - \underbrace{\arctan 1}_{=\pi/4}$$

Wegen Stetigkeit der Funktionen arctan und e^x gilt weiter: $\lim_{b\to\infty}\arctan e^b = \pi/2$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \pi/4$$

Aufgabe A5:

b) Integrand $\ln(x)$ hat Polstelle bei 0:

$$a>0: \int_a^1 \ln x \, dx = \int_a^1 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x \Big|_a^1 - \int_a^1 x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= 0 - a \ln(a) - x \Big|_a^1 = a - 1 - a \ln(a)$$

$$a \searrow 0: \lim_{a \searrow 0} \int_a^1 \ln x \, dx = \lim_{a \searrow 0} \left(a - 1 - a \ln(a)\right) = -1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln x \, dx = -1 .$$