



Klausurvorbereitungskurs

Mathematik I für MB

5. Übung: Differential- und Integralrechnung

A1 Ableitung einer Umkehrfunktion

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4), \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

- Skizziere die Funktion über ihrem Definitionsbereich.
- Zeige, dass die Funktion streng monoton fallend ist.
- Bestimme den Definitionsbereich und die Bildmenge der Umkehrfunktion f^{-1} .
- Berechne den Funktionswert der Umkehrfunktion und den ihrer Ableitung an der Stelle $x = 0$, also $f^{-1}(0)$ und $(f^{-1})'(0)$.

A2 Extrema

Berechne im Intervall $[-3, 2]$ das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4 - |x + 2|, & \text{für } -3 \leq x \leq -1, \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{9}{2}, & \text{für } -1 < x \leq 2. \end{cases}$$

A3 Integrale

Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_1^2 x^3 \ln(x) dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} dx \quad \text{und} \quad \int_0^3 \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}} dx.$$

A4 Integrationstechniken

Berechne folgende Integrale mit Hilfe einer geeigneten Substitution oder gegebenenfalls mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_e^{e^5} \frac{\ln x}{x} dx, \quad \int_0^2 \cos(\sqrt{x}) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x dx,$$
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{und} \quad \int_1^2 \sin(\ln x) dx.$$

A5 Uneigentliche Integrale

- Entscheide, ob folgende uneigentliche Integrale konvergieren:

$$\int_1^{\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$$

- Berechne das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 \ln(x) dx.$$